演習問題

2025 年 5 月 29 日　　　学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[問 1]　時刻 $t = 0$ における $|x\rangle$ 表示の波動関数 $\langle x|\Psi(t=0)\rangle = \Psi(t=0,x)$ が

$$\langle x|\Psi(t=0)\rangle = \frac{A}{x^2+a^2},$$

で与えられているとする。ここで A, a は正の実数とする。必要であれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{1}{(x^2+1)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2},$$

を用いよ。

(1)　規格化条件より A を a で表せ。

(2)　$\langle x\rangle, \langle x^2\rangle, \sigma_x$ を求めよ。

(3)　$|p\rangle$ 表示の波動関数 $\langle p|\Psi(t=0)\rangle$ を求めよ。波動関数の変換則

$$\langle p|\Psi(t=0)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \langle p|x\rangle\langle x|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ipx/\hbar}\langle x|\Psi(t=0)\rangle,$$

および留数積分を用いるとよい。

(4)　$\langle p\rangle, \langle p^2\rangle, \sigma_p$ を求めよ。

(5)　不確定性関係 $\sigma_x\sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$ が成り立っていることを確かめよ。

[解 1]

(1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{A}{x^2+a^2}\right)^2 \overset{x=ax'}{=} \frac{A^2}{a^3}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\ \frac{1}{(x'^2+1)^2} = \frac{\pi A^2}{2a^3} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad A = \sqrt{\frac{2a^3}{\pi}}.$$

(2)

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= A^2\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{x}{(x^2+a^2)^2} = 0,\\
\langle x^2\rangle &= A^2\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} \overset{x=ax'}{=} \frac{A^2}{a}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\ \frac{x'^2}{(x'^2+1)^2} = \frac{\pi A^2}{2a} = a^2,\\
\sigma_x &= \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = a.
\end{aligned}$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\langle p|\Psi(t=0)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \langle p|x\rangle\langle x|\Psi(t=0)\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ipx/\hbar}\langle x|\Psi(t=0)\rangle \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ipx/\hbar}\frac{1}{(x-ia)(x+ia)} \\
&\overset{\text{留数積分}}{=} \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}}(-2\pi i)e^{-ip(-ia)/\hbar}\frac{1}{-ia-ia} & (p>0) \\ \frac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}}(2\pi i)e^{-ip(ia)/\hbar}\frac{1}{ia+ia} & (p<0) \end{cases} \\
&= \sqrt{\frac{a}{\hbar}}e^{-a|p|/\hbar}.
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
\langle p\rangle &= \frac{a}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dp\ pe^{-2a|p|/\hbar} = 0, \\
\langle p^2\rangle &= \frac{a}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dp\ p^2e^{-2a|p|/\hbar} = \frac{a}{\hbar}\frac{\hbar^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\int_{-\infty}^{\infty} dp\ e^{-2a|p|/\hbar} = \frac{a}{\hbar}\frac{\hbar^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{\hbar}{a}\right) = \frac{\hbar^2}{2a^2}, \\
\sigma_p &= \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}a}.
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\sigma_x\sigma_p = a\cdot\frac{\hbar}{\sqrt{2}a} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} > \frac{\hbar}{2}.
$$

[問 2]　時刻 $t=0$ において、系の状態 $|\Psi(t=0)\rangle$ が 2 つのエネルギー固有状態 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ の重ね合わせ

$$
|\Psi(t=0)\rangle = a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle,
$$

で与えられているとする。ただし簡単のため a, b は実数とし、$|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ は束縛状態とする。それぞれのエネルギーを E_1, E_2 として、$|x\rangle$ 表示の波動関数 $\langle x|\Psi(t=0)\rangle = \Psi(t,x)$ は

$$
\Psi(t,x) = a\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + b\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar},
$$

となる。束縛状態であるから、$\psi_1(x), \psi_2(x)$ は実関数として一般性を失わない。このときの粒子の存在確率分布は

$$
|\Psi(t,x)|^2 = a^2\psi_1(x)^2 + b^2\psi_2(x)^2 + 2ab\psi_1(x)\psi_2(x)\cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t\right),
$$

となることを以前に見た。

(1)　粒子の存在確率は時間の関数として振動する。その振動周期 τ を求めよ。

(2)　大雑把に $\Delta E := E_2 - E_1, \Delta t := \tau$ とする。$\Delta E\Delta t$ の値を求め、エネルギーと時間の不確定性関係 $\sigma_H \frac{\sigma_A}{d\langle\hat{A}\rangle/dt} \geq \frac{\hbar}{2}$ と比較せよ。

[解 2]

(1)　振動部分は $\cos(\cdots)$ から来るので

$$\tau = \frac{2\pi\hbar}{E_2 - E_1}.$$

(2)

$$\Delta E \Delta t = (E_2 - E_1)\frac{2\pi\hbar}{E_2 - E_1} = 2\pi\hbar > \frac{\pi}{2}\hbar.$$

[問 3]

(1)　生成消滅演算子は、位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ を用いて

$$消滅演算子\ \hat{a} := \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(i\hat{p} + m\omega\hat{x}), \qquad 生成演算子\ \hat{a}^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}),$$

と定義される。$\hat{x}$ と $\hat{p}$ に成り立つ正準交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を用いて

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1,$$

を示せ。ただし、任意の演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ に対して交換子は $[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ で定義される。

(2)　調和振動子の Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2,$$

が

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right),$$

と表されることを示せ。

(3)　状態 $|\psi\rangle$ が時間に依存しない Schrödinger 方程式 $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ を満たしているとする。このとき、(1)(2) の結果を使うことにより

$$\hat{H}(\hat{a}|\psi\rangle) = (E - \hbar\omega)(\hat{a}|\psi\rangle),$$
$$\hat{H}(\hat{a}^\dagger|\psi\rangle) = (E + \hbar\omega)(\hat{a}^\dagger|\psi\rangle),$$

となることを示せ。これは、

- $\hat{a}|\psi\rangle$ も Schrödinger 方程式の解であり、エネルギー固有値 $E - \hbar\omega$ の固有ベクトルである
- $\hat{a}^\dagger|\psi\rangle$ も Schrödinger 方程式の解であり、エネルギー固有値 $E + \hbar\omega$ の固有ベクトルである

ことを意味している。ただし、$\hat{a}|\psi\rangle$ も $\hat{a}^\dagger|\psi\rangle$ も 0 ベクトルではないとする。

[解 3]

(1) 正準交換関係 $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$ を用いて

$$\begin{aligned}
[\hat{a},\hat{a}^\dagger] &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(i\hat{p}+m\omega\hat{x}),\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p}+m\omega\hat{x})\right] \\
&= \frac{1}{2\hbar m\omega}[i\hat{p}+m\omega\hat{x},-i\hat{p}+m\omega\hat{x}] \\
&= \frac{1}{2\hbar m\omega}([i\hat{p},-i\hat{p}]+[i\hat{p},m\omega\hat{x}]+[m\omega\hat{x},-i\hat{p}]+[m\omega\hat{x},m\omega\hat{x}]) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

となる。

(2) 生成消滅演算子を用いて Hamiltonian を書き直すと

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2m}\hat{p}^2+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \\
&= \frac{1}{2m}\left[i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right)\right]^2+\frac{1}{2}m\omega^2\left[\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\right]^2 \\
&= -\frac{\hbar\omega}{4}\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right)^2+\frac{\hbar\omega}{4}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)^2 \\
&= -\frac{\hbar\omega}{4}\left(\hat{a}\hat{a}-\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\right)+\frac{\hbar\omega}{4}\left(\hat{a}\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\right) \\
&= \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) \\
&= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

となる。

(3) まず $\hat{a}|\psi\rangle$ について、

$$\begin{aligned}
\hat{H}(\hat{a}|\psi\rangle) &= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)(\hat{a}|\psi\rangle) \\
&= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}+\frac{1}{2}\hat{a}\right)|\psi\rangle \\
&\overset{[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1}{=} \hbar\omega\left[\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger-1\right)\hat{a}+\frac{1}{2}\hat{a}\right]|\psi\rangle \\
&= \hat{a}\left[\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)-\hbar\omega\right]|\psi\rangle \\
&= \hat{a}\left(\hat{H}-\hbar\omega\right)|\psi\rangle \\
&\overset{|\psi\rangle\,\text{の定義}}{=} \hat{a}(E-\hbar\omega)|\psi\rangle \\
&\overset{\hat{a}\text{と数は交換する}}{=} (E-\hbar\omega)(\hat{a}|\psi\rangle).
\end{aligned}$$

同様に、$\hat{a}^\dagger|\psi\rangle$ について、

$$\begin{aligned}
\hat{H}(\hat{a}^\dagger|\psi\rangle) &= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)(\hat{a}^\dagger|\psi\rangle) \\
&= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger+\frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\right)|\psi\rangle \\
&\overset{[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1}{=} \hbar\omega\left[\hat{a}^\dagger\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\right)+\frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\right]|\psi\rangle \\
&= \hat{a}^\dagger\left[\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)+\hbar\omega\right]|\psi\rangle \\
&= \hat{a}^\dagger\left(\hat{H}+\hbar\omega\right)|\psi\rangle \\
&\overset{|\psi\rangle\text{ の定義}}{=} \hat{a}^\dagger(E+\hbar\omega)|\psi\rangle \\
&\overset{\hat{a}^\dagger\text{と数は交換する}}{=} (E+\hbar\omega)(\hat{a}^\dagger|\psi\rangle).
\end{aligned}$$

[問 4]　調和振動子の基底状態 $|\psi_0\rangle$ は $\hat{a}|\psi_0\rangle=0$ で与えられる。

(1)　基底状態 $|\psi_0\rangle$ の定義式 $\hat{a}|\psi_0\rangle=0$ に左から $\langle x|$ を掛け、$\langle x|\hat{x}|\cdots\rangle = x\langle x|\cdots\rangle$ および $\langle x|\hat{p}|\cdots\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|\cdots\rangle$ を用いることにより、$\psi_0(x)=\langle x|\psi_0\rangle$ に対する微分方程式

$$\left(\hbar\frac{d}{dx}+m\omega x\right)\psi_0(x)=0,$$

を導け。

(2)　(1) の微分方程式を解くことで、

$$\psi_0(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2},$$

が得られることを示せ。

[解 4]

(1)　$|\psi_0\rangle$ の定義式より

$$\begin{aligned}
\langle x|\hat{a}|\psi_0\rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\langle x|(i\hat{p}+m\omega\hat{x})|\psi_0\rangle = 0 \\
&\overset{\langle x|\hat{p}|\cdots\rangle=-i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|\cdots\rangle}{\Longrightarrow} \quad \left(\hbar\frac{d}{dx}+m\omega x\right)\langle x|\psi_0\rangle = 0 \\
&\overset{\psi_0(x):=\langle x|\psi_0\rangle}{\Longrightarrow} \quad \left(\hbar\frac{d}{dx}+m\omega x\right)\psi_0(x) = 0,
\end{aligned}$$

となる。

(2)　(1) の微分方程式を解くと

$$\begin{aligned}
\left(\hbar\frac{d}{dx}+m\omega x\right)\psi_0(x)=0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{d}{dx}\ln\psi_0(x) = -\frac{m\omega}{\hbar}x \\
&\Longrightarrow \quad \ln\psi_0(x) = -\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 \\
&\Longrightarrow \quad \ln\psi_0(x) = -\frac{m\omega}{2\hbar}x^2+\text{定数} \\
&\Longrightarrow \quad \psi_0(x) = a_0 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2},
\end{aligned}$$

となる。ただし a_0 は正の実数に取る。規格化条件より

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi_0(x)|^2 = a_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} = a_0^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad a_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}},$$

であるから、

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2},$$

となる。