演習問題

2025 年 5 月 22 日　　学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[問 1]　系の状態 $|\Psi\rangle$ が正規直交基底 $\{|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle\}$ を用いて

$$|\Psi\rangle = \frac{3}{5}|\alpha_1\rangle - \frac{4}{5}|\alpha_2\rangle,$$

と書かれているとする。

(1)　$\{|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle\}$ 表示の波動関数を求めよ。

(2)　別の正規直交基底 $\{|\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle\}$ を

$$\begin{pmatrix} |\alpha_1\rangle \\ |\alpha_2\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |\beta_1\rangle \\ |\beta_2\rangle \end{pmatrix},$$

で定義する。$\{|\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle\}$ 表示の波動関数を求めよ。

[解 1]

(1)

$$\begin{pmatrix} \langle\alpha_1|\Psi\rangle \\ \langle\alpha_2|\Psi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{pmatrix} \langle\beta_1|\Psi\rangle \\ \langle\beta_2|\Psi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\beta_1|\alpha_1\rangle & \langle\beta_1|\alpha_2\rangle \\ \langle\beta_2|\alpha_1\rangle & \langle\beta_2|\alpha_2\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \langle\alpha_1|\Psi\rangle \\ \langle\alpha_2|\Psi\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{7}{5} \end{pmatrix}.$$

[問 2]　$\hat{p}$ 演算子が任意の状態 $|\Psi\rangle$ に作用した状態 $\hat{p}|\Psi\rangle$ を $|x\rangle$ 表示で見ると、

$$\langle x|\hat{p}|\Psi\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|\Psi\rangle,$$

であった。では、$\hat{x}$ 演算子が $|\Psi\rangle$ に作用した状態 $\hat{x}|\Psi\rangle$ を $|p\rangle$ 表示で見るとどうなるだろうか。

$$\langle p|\hat{x}|\Psi\rangle,$$

に完全性関係 $1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ |x\rangle\langle x|$ を挟み込み、$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar}$ あるいはその複素共役 $\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-ipx/\hbar}$ を用いることで求めよ。

[解 2]

$$
\begin{aligned}
\langle p|\hat{x}|\Psi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \langle p|x\rangle\langle x|\hat{x}|\Psi\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar} x\langle x|\Psi\rangle \\
&= i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar}\langle x|\Psi\rangle \\
&= i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \langle p|x\rangle\langle x|\Psi\rangle \\
&= i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\langle p|\Psi\rangle.
\end{aligned}
$$

[問 3] 調和振動子の基底状態は、波動関数が $\Psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ で与えられていた。ブラケット記法では、これは

$$
\langle x|\Psi_0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2},
$$

を意味する。

(1) $|p\rangle$ 表示での波動関数 $\langle p|\Psi_0\rangle$ を求めよ。$\langle p|\Psi_0\rangle$ から始め、完全性関係 $1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ |x\rangle\langle x|$ を挟み込み、$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$ あるいはその複素共役 $\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar}$ を用いるとよい。また、Gauss 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-(x-x_0)^2} = \sqrt{\pi}$ が複素数の x_0 についても成り立つことも用いるとよい。

(2) (1) で得られた波動関数 $\langle p|\Psi_0\rangle$ が、規格化条件 $\int_{-\infty}^{\infty} dp\ \langle\Psi_0|p\rangle\langle p|\Psi_0\rangle = 1$ を満たしていることを確かめよ。

[解 3]

(1)

$$
\begin{aligned}
\langle p|\Psi_0\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \langle p|x\rangle\langle x|\Psi_0\rangle \\
&\overset{\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-ipx/\hbar}}{=} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ipx/\hbar} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&\overset{\text{平方完成}}{=} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x+\frac{ip}{m\omega}\right)^2} e^{-\frac{p^2}{2\hbar m\omega}} \\
&\overset{\text{Gauss 積分}}{=} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m\omega}} e^{-\frac{p^2}{2\hbar m\omega}} \\
&= \left(\frac{1}{\pi\hbar m\omega}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{p^2}{2\hbar m\omega}}.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dp\ \langle\Psi_0|p\rangle\langle p|\Psi_0\rangle = \sqrt{\frac{1}{\pi\hbar m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} dp\ e^{-\frac{p^2}{\hbar m\omega}} = \sqrt{\frac{1}{\pi\hbar m\omega}} \sqrt{\pi\hbar m\omega} = 1.
$$

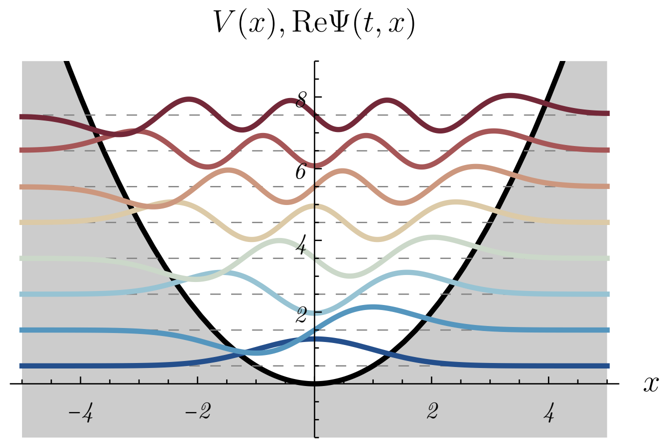

図 1: 調和振動子ポテンシャルと $|x\rangle$ 表示での波動関数。

[問 4]　演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ に対する交換子は

$$[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A},$$

で定義される。

(1)　以下の関係式を示せ。

$$[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}], \qquad [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}.$$

(2)　$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ と帰納法を用いて、以下の関係式を示せ。

$$[\hat{x}^n, \hat{p}] = i\hbar n \hat{x}^{n-1}.$$

(3)　以下の関係式を示せ。関数 $f(x)$ は Taylor 展開可能とする。

$$[f(\hat{x}), \hat{p}] = i\hbar \frac{d}{d\hat{x}} f(\hat{x}).$$

[解 4]

(1)

$$[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = (\hat{A} + \hat{B})\hat{C} - \hat{C}(\hat{A} + \hat{B}) = \hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A} - \hat{C}\hat{B} = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}],$$
$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}.$$

(2)　帰納法による。$n = 1$ のとき

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar,$$

より成立。$n=k\in\mathbb{N}$ のとき成立すると仮定すると、(1) の結果を用いて

$$[\hat{x}^{k+1},\hat{p}]=[\hat{x}\hat{x}^k,\hat{p}]=\hat{x}[\hat{x}^k,\hat{p}]+[\hat{x},\hat{p}]\hat{x}^k=\hat{x}i\hbar k\hat{x}^{k-1}+i\hbar\hat{x}^k=i\hbar(k+1)\hat{x}^k,$$

であるから、$n=k+1$ でも成立。

(3)　Taylor 展開可能であるという仮定、および (2) の結果を用いて

$$\begin{aligned}[f(\hat{x}),\hat{p}]&=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\hat{x}^n,\hat{p}\right]\overset{[1,\hat{p}]=0}{=}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\hat{x}^n,\hat{p}\right]\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)i\hbar n\hat{x}^{n-1}=i\hbar\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(0)\hat{x}^{n-1}=i\hbar\frac{d}{d\hat{x}}f(\hat{x}).\end{aligned}$$

[問 5]　運動量演算子 $\hat{p}$ の性質として、この演算子を定数倍して e の肩に乗せた演算子 $e^{i\hat{p}a/\hbar}:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{ia}{\hbar}\right)^n\hat{p}^n$ が任意の状態 $|\Psi\rangle$ に掛かると、$|x\rangle$ で見たときに a だけの推進を引き起こしている、つまり $\langle x|\Psi\rangle$ の x を $x+a$ に置き換えたものに相当している

$$\langle x|e^{i\hat{p}a/\hbar}|\Psi\rangle=\langle x+a|\Psi\rangle,$$

ことを示せ。$\hat{p}$ 演算子が任意の状態 $|\Psi\rangle$ に作用した状態 $\hat{p}|\Psi\rangle$ を $|x\rangle$ 表示で見ると、

$$\langle x|\hat{p}|\Psi\rangle=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|\Psi\rangle,$$

であることを用いるとよい。

[解 5]

$$\begin{aligned}\langle x|e^{i\hat{p}a/\hbar}|\Psi\rangle&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{ia}{\hbar}\right)^n\langle x|\hat{p}^n|\Psi\rangle\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{ia}{\hbar}\right)^n\langle x|\hat{p}\cdot\hat{p}^{n-1}|\Psi\rangle\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{ia}{\hbar}\right)^n\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle x|\hat{p}^{n-1}|\Psi\rangle\\&=\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{ia}{\hbar}\right)^n\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\langle x|\Psi\rangle\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}a^n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\langle x|\Psi\rangle\\&\overset{x\,\text{周りでの Maclaurin 展開}}{=}\langle x+a|\Psi\rangle,\end{aligned}$$

より示される。この結果が妥当であることは、上式において a が微小であるとすると

$$\langle x|\left(1+\frac{ia\hat{p}}{\hbar}\right)|\Psi\rangle=\langle x|\Psi\rangle+a\frac{\partial}{\partial x}\langle x|\Psi\rangle\qquad\Longrightarrow\qquad\langle x|\hat{p}|\Psi\rangle=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|\Psi\rangle,$$

となることからもわかる。この意味で、$\hat{p}$ は $|x\rangle$ 表示での微小推進を引き起こす、と言う。