

演習問題

2025 年 4 月 24 日

学籍番号

氏名

[問 1]

調和振動子

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

について、励起状態の波動関数を求めよう。

$$\xi := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x,$$

を導入すると、波動関数 $\Psi(t, x) = \psi(x)\varphi(t)$ の $\psi(x)$ 部分について、

$$\psi(\xi) = (a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots)e^{-\xi^2/2},$$

と展開したときの係数が漸化式

$$a_{j+2} = \frac{(2j+1)-K}{(j+1)(j+2)}a_j \quad (j = 0, 1, \dots),$$

を満たすことを見た。さらに、波動関数が発散しないためには

$$K = 2n+1 \quad (n \in \mathbb{Z}, n \geq 0),$$

でなければならないことも見た。さて、この漸化式を用いて $\psi_5(x)$ および $\psi_6(x)$ を求めよ。規格化定数は求めなくてよい。また、それらが Hermite 多項式 $H_n(\xi)$ に対する Rodrigues の公式

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}, \quad H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^n e^{-\xi^2}.$$

を用いて求めた $\psi_5(\xi)$ および $\psi_6(\xi)$ に比例することを確認せよ。

[解 1] $n = 5$ について、偶数系列は $a_0 = a_2 = \cdots = 0$ である。奇数系列は漸化式より

$$a_3 = \frac{3-11}{2 \cdot 3} a_1 = -\frac{4}{3} a_1, \quad a_5 = \frac{7-11}{4 \cdot 5} a_3 = \frac{4}{15} a_1, \quad a_7 = \frac{11-11}{6 \cdot 7} a_5 = 0,$$

となる。 $n = 6$ について、奇数系列は $a_1 = a_3 = \cdots = 0$ である。偶数系列は漸化式より

$$a_2 = \frac{1-13}{1 \cdot 2} a_0 = -6a_0, \quad a_4 = \frac{5-13}{3 \cdot 4} a_2 = 4a_0, \quad a_6 = \frac{9-13}{5 \cdot 6} a_4 = -\frac{8}{15} a_0, \quad a_8 = \frac{13-13}{7 \cdot 8} a_6 = 0,$$

となる。また、Hermite 多項式は Rodrigues の公式より

$$\begin{aligned} H_0(\xi) &= 1, \\ H_1(\xi) &= 2\xi, \\ H_2(\xi) &= 4\xi^2 - 2, \\ H_3(\xi) &= 8\xi^3 - 12\xi, \\ H_4(\xi) &= 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12, \\ H_5(\xi) &= 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi, \\ H_6(\xi) &= 64\xi^6 - 480\xi^4 + 720\xi^2 - 120, \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \psi_5(\xi) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^5 5!}} (120\xi - 160\xi^3 + 32\xi^5) e^{-\xi^2/2}, \\ \psi_6(\xi) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^6 6!}} (-120 + 720\xi^2 - 480\xi^4 + 64\xi^6) e^{-\xi^2/2}. \end{aligned}$$

となり、漸化式を使って求めた結果に比例している。

[問 2]

調和振動子の基底状態 $\psi_0(\xi)$ について、波動関数が古典的には禁止されている領域 ($E_0 < V(x)$ となる領域) にも分布していることがわかる。粒子の位置を測定したとき、この古典的な禁止領域に粒子を見つける確率はいくらか、図 1 を参考に大まかに見積もれ。

[解 2] $|\psi_0(\xi)|^2 \propto e^{-\xi^2}$ であり、また

$$E_0 < V(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\hbar\omega}{2} < \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} < x^2 \quad \Rightarrow \quad \xi < -1 \text{ or } \xi > 1,$$

である。図 1 より、大雑把に $\xi < -1, \xi > 1$ にはどちらも全体の 10% 程度の確率が分布している。よって、古典的禁止領域に粒子を見つける確率は約 20% である。(正確に見積もると約 15.7% となる。)

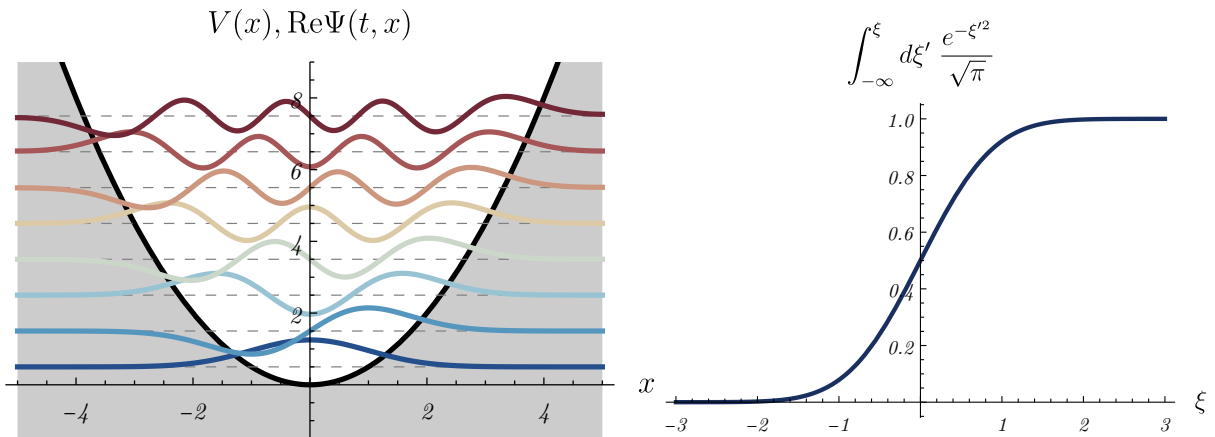


図 1: 調和振動子ポテンシャル (左)、および [問 2] の参考図 (右)。

[問 3]

自由粒子の波動関数 $\Psi(t, x) = \Psi_k(t, x) := e^{ik(x - \frac{\hbar k}{2m}t)}$ ($-\infty < k < \infty$) について、確率流

$$j(t, x) = \frac{i\hbar}{2m} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi^*(t, x) \right) \Psi(t, x) - \Psi^*(t, x) \left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi(t, x) \right) \right],$$

を計算せよ。確率流はどちらの向きに流れているか。

[解 3]

$$j(t, x) = \frac{\hbar k}{m},$$

であり、 k の符号の向きに流れている。

[問 4]

デルタ関数井戸について、束縛状態の解は

$$\psi_{\text{bound}}(x) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-\frac{m\alpha}{\hbar^2}|x|},$$

と求まった。一方、散乱状態の解は

$$\psi_{\text{scattering}}(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & (x < 0), \\ Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} & (x > 0), \end{cases}$$

$$A + B = F + G, \quad F - G = (1 + 2i\beta)A - (1 - 2i\beta)B, \quad \beta := \frac{m\alpha}{\hbar^2 k} = \frac{\alpha}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2E}}.$$

と求まった。以下、追加の境界条件 $G = 0$ は指定しないで考えよう。束縛状態の解と散乱状態の解が直交すること

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_{\text{bound}}^*(x) \psi_{\text{scattering}}(x) = 0,$$

を示せ。

[解 4]

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_{\text{bound}}^*(x) \psi_{\text{scattering}}(x) \\ &= \int_{-\infty}^0 dx \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} \left[Ae^{(ik + \frac{m\alpha}{\hbar^2})x} + Be^{(-ik + \frac{m\alpha}{\hbar^2})x} \right] + \int_0^{\infty} dx \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} \left[Fe^{(ik - \frac{m\alpha}{\hbar^2})x} + Ge^{(-ik - \frac{m\alpha}{\hbar^2})x} \right] \\ &= \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar k} \left[\frac{A}{\beta + i} + \frac{B}{\beta - i} + \frac{F}{\beta - i} + \frac{G}{\beta + i} \right] \\ &= \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar k} \frac{(\beta - i)(A + G) + (\beta + i)(B + F)}{\beta^2 + 1}, \end{aligned}$$

であるが、ここで

$$A + B = F + G, \quad F - G = (1 + 2i\beta)A - (1 - 2i\beta)B,$$

の第1式を β 倍したものに第2式を $-i$ 倍したものを足すと

$$\beta(A+B)-i(F-G)=\beta(F+G)-i[(1+2i\beta)A-(1-2i\beta)B] \implies (\beta-i)(A+G)+(\beta+i)(B+F)=0,$$

となるので示された。