

演習問題

2025 年 7 月 17 日

学籍番号

氏名

[問 1] Larmor 歳差運動の時間発展を計算しよう。Hamiltonian および Schrödinger 方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\chi(t)\rangle = \hat{H} |\chi(t)\rangle, \quad \hat{H} = -\gamma \hat{S} \cdot \mathbf{B},$$

で与えられ、外部から印加された磁束密度 $\mathbf{B}$ は

$$B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad B_z = B_0,$$

とする。また、スピン演算子は

$$\hat{S}_x \stackrel{\text{表示}}{=} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y \stackrel{\text{表示}}{=} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z \stackrel{\text{表示}}{=} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

で与えられる。

(1) Hamiltonian の固有状態が

$$|\chi_+\rangle \stackrel{\text{表示}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\chi_-\rangle \stackrel{\text{表示}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

で与えられることを示し、対応するエネルギー固有値を求めよ。

(2) 初期状態

$$|\chi(t=0)\rangle \stackrel{\text{表示}}{=} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ e^{i\delta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix},$$

に対し、一般の時刻 t における状態 $|\chi(t)\rangle$ を求めよ。

(3) 時刻 t におけるスピンの期待値 $\langle \chi(t) | \hat{S}_x | \chi(t) \rangle, \langle \chi(t) | \hat{S}_y | \chi(t) \rangle, \langle \chi(t) | \hat{S}_z | \chi(t) \rangle$ を求め、歳差運動の角振動数を求めよ。また、時刻 t において $\hat{S}_x$ を測定したとき、測定値 $+\frac{\hbar}{2}$ を得る確率および $-\frac{\hbar}{2}$ を得る確率をそれぞれ求めよ。

[解 1]

(1) Hamiltonian は

$$\hat{H} \stackrel{\text{表示}}{=} -\frac{\hbar}{2} \gamma B_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

であるから、

$$\hat{H} |\chi_+\rangle \stackrel{\text{表示}}{=} -\frac{\hbar}{2} \gamma B_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \gamma B_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{H} |\chi_-\rangle \stackrel{\text{表示}}{=} +\frac{\hbar}{2} \gamma B_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = +\frac{\hbar}{2} \gamma B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

より確かに $|\chi_{\pm}\rangle$ は Hamiltonian の固有状態であり、対応する固有値は $E_{\pm} := \mp \frac{\hbar}{2} \gamma B_0$ である。

(2) それぞれのエネルギー固有状態は $e^{-\frac{iE_{\pm}t}{\hbar}}$ で時間発展するから、

$$|\chi(t)\rangle = e^{-\frac{iE_{+}t}{\hbar}} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) |\chi_{+}\rangle + e^{-\frac{iE_{-}t}{\hbar}} e^{i\delta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) |\chi_{-}\rangle \stackrel{\text{表示}}{=} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i\gamma B_0 t}{2}} \\ e^{i\delta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{-\frac{i\gamma B_0 t}{2}} \end{pmatrix},$$

となる。

(3) スピンの期待値は

$$\begin{aligned} \langle \chi(t) | \hat{S}_x | \chi(t) \rangle &\stackrel{\text{表示}}{=} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{-\frac{i\gamma B_0 t}{2}} & e^{-i\delta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i\gamma B_0 t}{2}} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i\gamma B_0 t}{2}} \\ e^{i\delta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{-\frac{i\gamma B_0 t}{2}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sin \alpha \cos(\gamma B_0 t - \delta), \\ \langle \chi(t) | \hat{S}_y | \chi(t) \rangle &\stackrel{\text{表示}}{=} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{-\frac{i\gamma B_0 t}{2}} & e^{-i\delta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i\gamma B_0 t}{2}} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i\gamma B_0 t}{2}} \\ e^{i\delta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{-\frac{i\gamma B_0 t}{2}} \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \sin \alpha \sin(\gamma B_0 t - \delta), \\ \langle \chi(t) | \hat{S}_z | \chi(t) \rangle &\stackrel{\text{表示}}{=} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{-\frac{i\gamma B_0 t}{2}} & e^{-i\delta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i\gamma B_0 t}{2}} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i\gamma B_0 t}{2}} \\ e^{i\delta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{-\frac{i\gamma B_0 t}{2}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \cos \alpha, \end{aligned}$$

となるので、歳差運動の角振動数は $\omega = \gamma B_0$ である。また、 $|\chi(t)\rangle$ を $\hat{S}_x$ の固有値 $\pm \frac{\hbar}{2}$ の固有状態

$$|\chi_{+}^{(x)}\rangle \stackrel{\text{表示}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\chi_{-}^{(x)}\rangle \stackrel{\text{表示}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

を用いて表すと

$$|\chi(t)\rangle = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i\gamma B_0 t}{2}} + e^{i\delta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{-\frac{i\gamma B_0 t}{2}}}{\sqrt{2}} |\chi_{+}^{(x)}\rangle + \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i\gamma B_0 t}{2}} - e^{i\delta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{-\frac{i\gamma B_0 t}{2}}}{\sqrt{2}} |\chi_{-}^{(x)}\rangle,$$

であるから、測定値 $\pm \frac{\hbar}{2}$ を得る確率 $P_{\pm}^{(x)}(t)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} P_{+}^{(x)}(t) &= \left| \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i\gamma B_0 t}{2}} + e^{i\delta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{-\frac{i\gamma B_0 t}{2}}}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \alpha \cos(\gamma B_0 t - \delta), \\ P_{-}^{(x)}(t) &= \left| \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i\gamma B_0 t}{2}} - e^{i\delta} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{-\frac{i\gamma B_0 t}{2}}}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos(\gamma B_0 t - \delta), \end{aligned}$$

となる。

[問 2] Stern-Gerlach の実験を Schrödinger 方程式から記述しよう。以下、空間は x, z 方向だけを考える。Hamiltonian および Schrödinger 方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle, \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \gamma \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{B},$$

で与えられ、 $\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_z^2$ である。また $\mathbf{B}$ は外部から印加された磁束密度であり、 B_0, α を定数として

$$B_x = -\alpha x, \quad B_z = B_0 + \alpha z,$$

とする。空間に関しては $\{|x, z\rangle\}$ 表示、スピンに関しては $\{|\chi_{\pm}\rangle\}$ 表示を用いると、

$$|\Psi(t)\rangle \stackrel{\text{表示}}{=} \begin{pmatrix} \Psi_+(t, x, z) \\ \Psi_-(t, x, z) \end{pmatrix}, \quad \hat{p}_x \stackrel{\text{表示}}{=} -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_z \stackrel{\text{表示}}{=} -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}, \quad \hat{S}_x \stackrel{\text{表示}}{=} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z \stackrel{\text{表示}}{=} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

であることに注意して、以下の問いに答えよ。

(1) 上記の表示を Schrödinger 方程式に代入することにより、 $\Psi_{\pm}(t, x, z)$ に対する方程式を導け。

(2) (1) で得られた方程式を簡潔にするため

$$\Psi_{\pm}(t, x, z) =: e^{\pm i\gamma B_0 t} \tilde{\Psi}_{\pm}(t, x, z),$$

とする。 $\tilde{\Psi}_{\pm}(t, x, z)$ に対する方程式を導け。

(3) B_0 が大きい場合、(2) で求めた方程式のうち $e^{\pm i\gamma B_0 t}$ を含む部分は激しく振動しキャンセルするため無視してよい。このとき、 $\tilde{\Psi}_{\pm}(t, x, z)$ に対する方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}_{\pm}(t, x, z) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tilde{\Psi}_{\pm}(t, x, z) + V_{\pm}(x, z) \tilde{\Psi}_{\pm}(t, x, z),$$

の形に帰着する。 $V_{\pm}(x, z)$ を求め、軌道が分離することを説明せよ。

[解 2]

(1) 与えられた表式を Schrödinger 方程式に代入し、

$$\begin{aligned} & i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Psi_+(t, x, z) \\ \Psi_-(t, x, z) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \begin{pmatrix} \Psi_+(t, x, z) \\ \Psi_-(t, x, z) \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \gamma \alpha x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_+(t, x, z) \\ \Psi_-(t, x, z) \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{2} \gamma (B_0 + \alpha z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_+(t, x, z) \\ \Psi_-(t, x, z) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

となるので、整理して

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_+(t, x, z) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi_+(t, x, z) + \frac{\hbar}{2} \gamma \alpha x \Psi_-(t, x, z) - \frac{\hbar}{2} \gamma (B_0 + \alpha z) \Psi_+(t, x, z), \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_-(t, x, z) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi_-(t, x, z) + \frac{\hbar}{2} \gamma \alpha x \Psi_+(t, x, z) + \frac{\hbar}{2} \gamma (B_0 + \alpha z) \Psi_-(t, x, z), \end{aligned}$$

となる。

(2) 与えられた表式を (1) の結果に代入し、

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}_+(t, x, z) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tilde{\Psi}_+(t, x, z) + \frac{\hbar}{2} \gamma \alpha x e^{-i\gamma B_0 t} \tilde{\Psi}_-(t, x, z) - \frac{\hbar}{2} \gamma \alpha z \tilde{\Psi}_+(t, x, z), \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}_-(t, x, z) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tilde{\Psi}_-(t, x, z) + \frac{\hbar}{2} \gamma \alpha x e^{i\gamma B_0 t} \tilde{\Psi}_+(t, x, z) + \frac{\hbar}{2} \gamma \alpha z \tilde{\Psi}_-(t, x, z), \end{aligned}$$

となる。

(3) (2) の結果から振動部分を除くと

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}_+(t, x, z) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tilde{\Psi}_+(t, x, z) - \frac{\hbar}{2} \gamma \alpha z \tilde{\Psi}_+(t, x, z),$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}_-(t, x, z) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tilde{\Psi}_-(t, x, z) + \frac{\hbar}{2} \gamma \alpha z \tilde{\Psi}_-(t, x, z),$$

となるが、これはポテンシャル

$$V_{\pm}(x, z) = \mp \frac{\hbar}{2} \gamma \alpha z,$$

の下で運動する粒子の Schrödinger 方程式である。よって、例えば $\gamma > 0, \alpha > 0$ の場合、 $\Psi_{\pm}(t, x, z)$ の波束はそれぞれ $\pm z$ 方向へ分離する。

[問 3] スピン角運動量の合成について、交換する演算子の組を理解しよう。以下のように、粒子 1, 粒子 2 に対応した 2 種類のスピン演算子を導入する

$$\text{粒子 1: } \hat{\mathbf{S}}_1 = \begin{pmatrix} \hat{S}_{1x} \\ \hat{S}_{1y} \\ \hat{S}_{1z} \end{pmatrix}, \quad \text{粒子 2: } \hat{\mathbf{S}}_2 = \begin{pmatrix} \hat{S}_{2x} \\ \hat{S}_{2y} \\ \hat{S}_{2z} \end{pmatrix}.$$

粒子 1 と粒子 2 のスピン演算子は $[\hat{S}_{1i}, \hat{S}_{2j}] = 0$ ($i, j = x, y, z$) および $[\hat{S}_{1i}, \hat{S}_{1j}] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{S}_{1k}$, $[\hat{S}_{2i}, \hat{S}_{2j}] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{S}_{2k}$ ($i, j, k = x, y, z$) を満たす。また、それぞれについて昇降演算子は $\hat{S}_{1\pm} := \hat{S}_{1x} \pm i\hat{S}_{1y}$, $\hat{S}_{2\pm} := \hat{S}_{2x} \pm i\hat{S}_{2y}$ で定義される。このとき、粒子 1, 2 を合わせたスピン演算子

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \hat{S}_x \\ \hat{S}_y \\ \hat{S}_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \hat{S}_{1x} + \hat{S}_{2x} \\ \hat{S}_{1y} + \hat{S}_{2y} \\ \hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z} \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2,$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) 全スピン角運動量の二乗が

$$\hat{\mathbf{S}}^2 = \hat{\mathbf{S}}_1^2 + \hat{\mathbf{S}}_2^2 + \hat{S}_{1+}\hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-}\hat{S}_{2+} + 2\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z},$$

と書けることを示せ。

(2) $\hat{\mathbf{S}}^2$ と $\hat{S}_1^2$ および $\hat{\mathbf{S}}^2$ と $\hat{S}_2^2$ が交換することを示せ。

(3) $\hat{\mathbf{S}}^2$ と $\hat{S}_{1z}$ および $\hat{\mathbf{S}}^2$ と $\hat{S}_{2z}$ が交換しないことを示せ。

[解 3]

(1) 定義を代入し、

$$\begin{aligned}
 \hat{S}^2 &= (\hat{S}_1 + \hat{S}_2)^2 \\
 &\stackrel{[\hat{S}_{1i}, \hat{S}_{2j}]=0}{=} \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 \\
 &= \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2(\hat{S}_{1x}\hat{S}_{2x} + \hat{S}_{1y}\hat{S}_{2y} + \hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z}) \\
 &= \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hat{S}_{1+}\hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-}\hat{S}_{2+} + 2\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z},
 \end{aligned}$$

と示される。

(2) $\hat{S}^2$ と $\hat{S}_1^2$ について、

$$\begin{aligned}
 [\hat{S}^2, \hat{S}_1^2] &= [\hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2, \hat{S}_1^2] \\
 &\stackrel{[\hat{S}_1^2, \hat{S}_1^2]=0, [\hat{S}_2^2, \hat{S}_1^2]=0}{=} 2[\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2, \hat{S}_1^2] \\
 &= 2[\hat{S}_{1x}\hat{S}_{2x} + \hat{S}_{1y}\hat{S}_{2y} + \hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z}, \hat{S}_1^2] \\
 &\stackrel{[\hat{S}_{2j}, \hat{S}_1^2]=0}{=} 2\left([\hat{S}_{1x}, \hat{S}_1^2]\hat{S}_{2x} + [\hat{S}_{1y}, \hat{S}_1^2]\hat{S}_{2y} + [\hat{S}_{1z}, \hat{S}_1^2]\hat{S}_{2z}\right) \\
 &\stackrel{[\hat{S}_{1i}, \hat{S}_1^2]=0}{=} 0,
 \end{aligned}$$

と示される。 $\hat{S}^2$ と $\hat{S}_2^2$ についても同様である。

(3) $\hat{S}^2$ と $\hat{S}_{1z}$ について、

$$\begin{aligned}
 [\hat{S}^2, \hat{S}_{1z}] &= [\hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2, \hat{S}_{1z}] \\
 &\stackrel{[\hat{S}_1^2, \hat{S}_{1z}]=0, [\hat{S}_2^2, \hat{S}_{1z}]=0}{=} 2[\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2, \hat{S}_{1z}] \\
 &= 2[\hat{S}_{1x}\hat{S}_{2x} + \hat{S}_{1y}\hat{S}_{2y} + \hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z}, \hat{S}_{1z}] \\
 &= 2\left([\hat{S}_{1x}, \hat{S}_{1z}]\hat{S}_{2x} + [\hat{S}_{1y}, \hat{S}_{1z}]\hat{S}_{2y}\right) \\
 &= 2i\hbar(-\hat{S}_{1y}\hat{S}_{2x} + \hat{S}_{1x}\hat{S}_{2y}) \\
 &\neq 0,
 \end{aligned}$$

と示される。 $\hat{S}^2$ と $\hat{S}_{2z}$ についても同様である。