# 演習問題

2025 年 7 月 10 日　　　学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿　　　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

**[問 1]**　昇降演算子 $\hat{L}_\pm := \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ について、

$$\hat{L}_+|l,m\rangle = A_l^m|l,m+1\rangle, \qquad \hat{L}_-|l,m\rangle = B_l^m|l,m-1\rangle.$$

に現れる定数 $A_l^m$, $B_l^m$ を以下の手続きで求めよ。ただし状態 $|l,m\rangle$, $|l,m\pm 1\rangle$ は規格化されているものとし、$A_l^m$, $B_l^m$ は正の実数とする。

**(1)**　昇降演算子が

$$\hat{L}_\pm^\dagger = \hat{L}_\mp,$$

を満たすことを示せ。

**(2)**　昇降演算子の積が

$$\hat{L}_\mp\hat{L}_\pm = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 \mp \hbar\hat{L}_z,$$

を満たすことを示せ。ただし $\hat{L}^2 := \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ である。

**(3)**　(2) の結果に左右から $\langle l,m|\cdots|l,m\rangle$ を作用させることで、

$$\begin{aligned} A_l^m &= \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m+1)} \ \left(=\hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\right), \\ B_l^m &= \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)} \ \left(=\hbar\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\right), \end{aligned}$$

を示せ。

**[解 1]**

**(1)**　$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y$ および $\hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z$ より

$$\begin{aligned} \hat{L}_x^\dagger &= \hat{p}_z^\dagger\hat{y}^\dagger - \hat{p}_y^\dagger\hat{z}^\dagger \overset{\hat{y},\,\hat{z},\,\hat{p}_y,\,\hat{p}_z\text{の Hermite 性}}{=} \hat{p}_z\hat{y} - \hat{p}_y\hat{z} \overset{[\hat{y},\hat{p}_z]=0,\,[\hat{z},\hat{p}_y]=0}{=} \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = \hat{L}_x, \\ \hat{L}_y^\dagger &= \hat{p}_x^\dagger\hat{z}^\dagger - \hat{p}_z^\dagger\hat{x}^\dagger \overset{\hat{z},\,\hat{x},\,\hat{p}_z,\,\hat{p}_x\text{の Hermite 性}}{=} \hat{p}_x\hat{z} - \hat{p}_z\hat{x} \overset{[\hat{z},\hat{p}_x]=0,\,[\hat{x},\hat{p}_z]=0}{=} \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = \hat{L}_y, \end{aligned}$$

より $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ は Hermite である。よって

$$\hat{L}_\pm^\dagger = \left(\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y\right)^\dagger = \hat{L}_x \mp i\hat{L}_y = \hat{L}_\mp,$$

となる。

**(2)**　昇降演算子の定義および交換関係から

$$\hat{L}_\mp\hat{L}_\pm = \left(\hat{L}_x \mp i\hat{L}_y\right)\left(\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y\right) = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 \pm i[\hat{L}_x,\hat{L}_y] \overset{[\hat{L}_x,\hat{L}_y]=i\hbar\hat{L}_z}{=} \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 \mp \hbar\hat{L}_z \overset{\hat{L}^2:=\hat{L}_x^2+\hat{L}_y^2+\hat{L}_z^2}{=} \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 \mp \hbar\hat{L}_z.$$

となる。

**(3)**　(1) より

$$\langle l,m|\hat{L}_\mp\hat{L}_\pm|l,m\rangle = \left|\hat{L}_\pm|l,\ m\rangle\right|^2 = (A_l^m)^2 \text{ or } (B_l^m)^2,$$

である一方、(2) より

$$\langle l,m|\hat{L}_{\mp}\hat{L}_{\pm}|l,m\rangle = \langle l,m|\left(\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 \mp \hbar\hat{L}_z\right)|l,m\rangle = \hbar^2\left[l(l+1) - m^2 \mp m\right] = \hbar^2\left[l(l+1) - m(m\pm 1)\right],$$

であるから、

$$A_l^m = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m+1)} \;\left(= \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\right),$$
$$B_l^m = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)} \;\left(= \hbar\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\right),$$

となる。

**[問 2]**　スピン演算子 $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ が Pauli 行列

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

を用いて

$$\hat{S}_x \overset{\text{表示}}{=} \frac{\hbar}{2}\sigma_x, \qquad \hat{S}_y \overset{\text{表示}}{=} \frac{\hbar}{2}\sigma_y, \qquad \hat{S}_z \overset{\text{表示}}{=} \frac{\hbar}{2}\sigma_z,$$

と与えられている。

**(1)**　Pauli 行列が

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk} + i\sum_l \epsilon_{jkl}\sigma_l,$$

を満たすことを示せ。ここで **Levi-Civita 記号** $\epsilon_{jkl}$ は

$$\epsilon_{jkl} := \begin{cases} +1 & (j,k,l) = (1,2,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2), \\ -1 & (j,k,l) = (1,3,2),\ (2,1,3),\ (3,2,1), \\ 0 & \text{他}, \end{cases}$$

で定義される。

**(2)**　スピン演算子の満たすべき交換関係

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z, \qquad [\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar\hat{S}_x, \qquad [\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar\hat{S}_y,$$

が満たされていることを、行列を計算することにより示せ。

**[解 2]**

**(1)**　題意の式は

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1,$$
$$\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z, \qquad \sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x, \qquad \sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y,$$

となる。1 行目については Pauli 行列を二乗することにより示される。2 行目については

$$\sigma_x\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\sigma_z, \qquad \sigma_y\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i\sigma_z,$$

$$\sigma_y\sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_x, \qquad \sigma_z\sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_x,$$

$$\sigma_z\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_y, \qquad \sigma_x\sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_y,$$

より示される。

**(2)**　(1) より

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z, \qquad [\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x, \qquad [\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y,$$

であるから、

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 [\sigma_x, \sigma_y] = \frac{i\hbar^2}{2}\sigma_z = i\hbar\hat{S}_z,$$
$$[\hat{S}_y, \hat{S}_z] = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 [\sigma_y, \sigma_z] = \frac{i\hbar^2}{2}\sigma_x = i\hbar\hat{S}_x,$$
$$[\hat{S}_z, \hat{S}_x] = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 [\sigma_z, \sigma_x] = \frac{i\hbar^2}{2}\sigma_y = i\hbar\hat{S}_y,$$

と示される。

**[問 3]**　電子のスピン状態 $|\chi\rangle$ が

$$|\chi\rangle \overset{\text{表示}}{=} A\begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix},$$

で与えられているとする。

**(1)**　状態 $|\chi\rangle$ を規格化することで定数 $A$ を求めよ。ただし $A$ は正の実数とする。

**(2)**　この状態に対するスピン $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ の期待値を求めよ。ただし $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ は [問 2] のように与えられているとする。

**(3)**　分散 $\sigma_{S_x}^2, \sigma_{S_y}^2, \sigma_{S_z}^2$ の平方根 $\sigma_{S_x}, \sigma_{S_y}, \sigma_{S_z}$ を求めよ。

**(4)**　不確定性関係

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle\chi|[\hat{A}, \hat{B}]|\chi\rangle\right)^2,$$

が $\hat{A} = \hat{S}_x, \hat{B} = \hat{S}_y$ に対して成り立っていることを示せ。

**[解 3]**

**(1)**

$$\langle\chi|\chi\rangle \overset{\text{表示}}{=} A^2\begin{pmatrix} -3i & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix} = 25A^2 = 1, \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{1}{5}.$$

**(2)**

$$\langle\chi|\hat{S}_x|\chi\rangle \overset{\text{表示}}{=} A^2\begin{pmatrix} -3i & 4 \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\langle\chi|\hat{S}_y|\chi\rangle \overset{\text{表示}}{=} A^2\begin{pmatrix} -3i & 4 \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{12}{25}\hbar,$$

$$\langle\chi|\hat{S}_z|\chi\rangle \overset{\text{表示}}{=} A^2\begin{pmatrix} -3i & 4 \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{7}{50}\hbar,$$

**(3)**

$$\begin{aligned}
\sigma_{S_x}^2 &= \langle\chi|(\hat{S}_x - \langle\chi|\hat{S}_x|\chi\rangle)^2|\chi\rangle = \langle\chi|\hat{S}_x^2|\chi\rangle - \langle\chi|\hat{S}_x|\chi\rangle^2 \\
&\overset{\text{表示}}{=} A^2\begin{pmatrix} -3i & 4 \end{pmatrix}\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix} - 0^2 = \frac{\hbar^2}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma_{S_x} = \frac{\hbar}{2}, \\
\sigma_{S_y}^2 &= \langle\chi|(\hat{S}_y - \langle\chi|\hat{S}_y|\chi\rangle)^2|\chi\rangle = \langle\chi|\hat{S}_y^2|\chi\rangle - \langle\chi|\hat{S}_y|\chi\rangle^2 \\
&\overset{\text{表示}}{=} A^2\begin{pmatrix} -3i & 4 \end{pmatrix}\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix} - \left(-\frac{12}{25}\hbar\right)^2 = \frac{49}{2500}\hbar^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma_{S_y} = \frac{7}{50}\hbar, \\
\sigma_{S_z}^2 &= \langle\chi|(\hat{S}_z - \langle\chi|\hat{S}_z|\chi\rangle)^2|\chi\rangle = \langle\chi|\hat{S}_z^2|\chi\rangle - \langle\chi|\hat{S}_z|\chi\rangle^2 \\
&\overset{\text{表示}}{=} A^2\begin{pmatrix} -3i & 4 \end{pmatrix}\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix} - \left(-\frac{7}{50}\hbar\right)^2 = \frac{576}{2500}\hbar^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma_{S_z} = \frac{12}{25}\hbar.
\end{aligned}$$

**(4)** $\hat{A} = \hat{S}_x, \hat{B} = \hat{S}_y$ に対する不確定性関係は

$$\sigma_{S_x}^2\sigma_{S_y}^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle\chi|[\hat{S}_x, \hat{S}_y]|\chi\rangle\right)^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\langle\chi|\hat{S}_z|\chi\rangle\right)^2,$$

であるが、

$$\sigma_{S_x}^2\sigma_{S_y}^2 = \left(\frac{7}{100}\hbar^2\right)^2 \geq \left(\frac{\hbar}{2}\langle\chi|\hat{S}_z|\chi\rangle\right)^2 = \left(\frac{7}{100}\hbar^2\right)^2,$$

より確かに成り立っている。