

演習問題

2025 年 4 月 10 日

学籍番号

氏名

[問 1]

- (1) Planck 定数の次元を MLT を用いて表せ。MLT とは M = mass(質量)、L = length(長さ)、T = time (時間) を用いた次元の表し方であり、例えば加速度 a は (長さ)/(時間)² なので、MLT で表すと $[a] = [LT^{-2}]$ となる。
- (2) 作用 S および角運動量 $L = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ の次元を MLT を用いて表せ。作用はラグランジアン の時間積分であること、およびラグランジアンはエネルギーと同じ次元を持っていることを用いるとよい。

[解 1]

- (1) $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s}$ より、 $[h] = [\text{ML}^2\text{T}^{-1}]$ 。
- (2) 作用 S について、 $[S] = [\text{ML}^2\text{T}^{-2} \cdot \text{T}] = [\text{ML}^2\text{T}^{-1}]$ 。角運動量 L について、 $[\mathbf{x}] = [\text{L}]$ 、 $[\mathbf{p}] = [\text{MLT}^{-1}]$ より $[L] = [\text{L} \cdot \text{ML}/\text{T}] = [\text{ML}^2\text{T}^{-1}]$ 。よって、Planck 定数は作用および角運動量と同じ次元を持つことがわかる。

[問 2]

Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi(t, x),$$

を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) = -\frac{\partial}{\partial x} j(t, x),$$

を示せ。ただし、確率密度と確率流は

$$\rho(t, x) = |\Psi(t, x)|^2, \quad j(t, x) = \frac{i\hbar}{2m} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi^*(t, x) \right) \Psi(t, x) - \Psi^*(t, x) \left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi(t, x) \right) \right],$$

で定義される。

[解 2]

Schrödinger 方程式を用いることで

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t, x)|^2 \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \Psi^*(t, x) \right) \Psi(t, x) + \left(\Psi^*(t, x) \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, x) \right) \\ &= \left(-\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi^*(t, x) + \frac{i}{\hbar} V(x) \Psi^*(t, x) \right) \Psi(t, x) + \Psi^*(t, x) \left(\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(t, x) - \frac{i}{\hbar} V(x) \Psi(t, x) \right) \\ &= -\frac{i\hbar}{2m} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi^*(t, x) \right) \Psi(t, x) - \Psi^*(t, x) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(t, x) \right) \right] \\ &= -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi^*(t, x) \right) \Psi(t, x) - \Psi^*(t, x) \left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi(t, x) \right) \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} j(t, x), \end{aligned}$$

となる。

[問 3]

Schrödinger 方程式の下で、以下の関係式

Ehrenfest の定理

$$\frac{d}{dt}\langle p \rangle = -\left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle,$$

を示せ。ただし $\langle p \rangle = \left\langle -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(t, x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(t, x)$ である。これは期待値が古典論の運動方程式に従うことを意味しており、Ehrenfest の定理と呼ばれる。

[解 3]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle p \rangle &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(t, x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(t, x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\partial}{\partial t} \Psi^*(t, x) \cdot \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(t, x) + \Psi^*(t, x) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(t, x) \right) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\partial}{\partial t} \Psi^*(t, x) \cdot \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(t, x) + \Psi^*(t, x) \cdot \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, x) \right) \right) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[-H\Psi^*(t, x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \Psi(t, x) + \Psi^*(t, x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (H\Psi(t, x)) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[-\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \Psi^*(t, x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \Psi(t, x) + \Psi^*(t, x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \Psi(t, x) \right] \\ &\stackrel{\text{部分積分}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[-\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \Psi^*(t, x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \Psi(t, x) + \Psi^*(t, x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \Psi(t, x) \right) \right] \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(t, x) \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \Psi(t, x) \\ &= -\left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle. \end{aligned}$$

ただし、「部分積分」の箇所では波動関数およびその微分たちが遠方で十分早く 0 になることを仮定した。

[問 4]

時刻 $t = 0$ における波動関数が

$$\Psi(t = 0, x) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & (-a \leq x \leq a) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases},$$

と表されているとする。ただし A, a は正の実数とする。

- (1) 規格化定数 A を a の関数として表せ。
- (2) $\langle x \rangle$ を求めよ。
- (3) $\langle p \rangle$ を求めよ。
- (4) $\langle x^2 \rangle$ を求めよ。
- (5) $\langle p^2 \rangle$ を求めよ。
- (6) σ_x^2 を求めよ。
- (7) σ_p^2 を求めよ。

(8) 不確定性関係 $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$ が成り立っていることを確かめよ。

[解 4]

(1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\Psi(t=0, x)|^2 = A^2 \int_{-a}^a dx (a^2 - x^2)^2 = \frac{16}{15} A^2 a^5 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{15}{16a^5}}.$$

(2)

$$\langle x \rangle = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx x (a^2 - x^2)^2 = 0.$$

(3)

$$\langle p \rangle = -i\hbar A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx (a^2 - x^2) \frac{d}{dx} (a^2 - x^2) = 0.$$

(4)

$$\langle x^2 \rangle = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 (a^2 - x^2)^2 = \frac{a^2}{7}.$$

(5)

$$\langle p^2 \rangle = (-i\hbar)^2 A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx (a^2 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} (a^2 - x^2) = \frac{5\hbar^2}{2a^2}.$$

(6)

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{a^2}{7}.$$

(7)

$$\sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{5\hbar^2}{2a^2}.$$

(8)

$$\sigma_x \sigma_p = \sqrt{\frac{a^2}{7}} \sqrt{\frac{5\hbar^2}{2a^2}} = \sqrt{\frac{5}{14}} \hbar > \frac{\hbar}{2}.$$

EXTRA PROBLEMS

[問 5]

時刻 $t = 0$ における確率密度 $\rho(t = 0, x)$ が

$$\rho(t = 0, x) = A e^{-\lambda(x-a)^2},$$

で与えられているとする。ここで A, a, λ は正の実数である。

(1) 規格化定数 A を求めよ。必要であれば、以下の Gauss 積分の導出のヒント

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda x^2} \right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\lambda(x^2+y^2)} = \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-\lambda r^2} = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} d(r^2) \int_0^{2\pi} d\theta e^{-\lambda r^2},$$

を用いよ。

(2) 期待値 $\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle$ および分散 σ_x^2 を求めよ。

(3) $\rho(t = 0, x)$ のグラフの概形を描け。

[解 5]

(1) Gauss 積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}},$$

となるから、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(t = 0, x) = A \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}.$$

(2)

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx x \rho(t = 0, x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} x e^{-\lambda(x-a)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} [(x-a) + a] e^{-\lambda(x-a)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} a e^{-\lambda(x-a)^2} = a, \\ \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \rho(t = 0, x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} x^2 e^{-\lambda(x-a)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} [(x-a)^2 + 2a(x-a) + a^2] e^{-\lambda(x-a)^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} [(x-a)^2 + a^2] e^{-\lambda(x-a)^2} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \left[-\frac{\partial}{\partial \lambda} + a^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda(x-a)^2} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \left[-\frac{\partial}{\partial \lambda} + a^2 \right] \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \\ &= \frac{1}{2\lambda} + a^2, \\ \sigma^2 &= \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1}{2\lambda}. \end{aligned}$$

(3) 略。

[問 6]

波動関数 $\Psi(t, x)$ が

$$\Psi(t, x) = A e^{-a \left(\frac{mx^2}{\hbar} + it \right)},$$

で与えられているとする。ただし m は考えている粒子の質量であり、 A, a は正の実数とする。

- (1) 規格化定数 A を a, m の関数として表せ。
- (2) どのようなポテンシャル $V(x)$ に対して、上記の波動関数は Schrödinger 方程式の解となっているか。
- (3) 任意の時刻 t における期待値 $\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle p \rangle, \langle p^2 \rangle$ を求めよ。
- (4) 分散 σ_x^2, σ_p^2 を求め、それらが不確定性関係 $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$ に従っていることを確かめよ。

[解 6]

(1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\Psi(t, x)|^2 = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{2amx^2}{\hbar}} = A^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{2am}} = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \left(\frac{2am}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

(2)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, x) = a\hbar A e^{-a\left(\frac{mx^2}{\hbar} + it\right)} = a\hbar \Psi(t, x),$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(t, x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{4am^2 x^2}{\hbar^2} - \frac{2am}{\hbar} \right) \right] A e^{-a\left(\frac{mx^2}{\hbar} + it\right)} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{4am^2 x^2}{\hbar^2} - \frac{2am}{\hbar} \right) \right] \Psi(t, x),$$

を Schrödinger 方程式に代入して、

$$V(x)\Psi(t, x) = 2a^2 mx^2 \Psi(t, x),$$

よって

$$V(x) = 2a^2 mx^2.$$

(3)

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x |\Psi(t, x)|^2 = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx x e^{-\frac{2amx^2}{\hbar}} = 0,$$

$$\langle x^2 \rangle = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-\frac{2amx^2}{\hbar}} = \frac{\hbar}{4am},$$

$$\langle p \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \Psi(t, x) = 2iamA^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx x e^{-\frac{2amx^2}{\hbar}} = 0,$$

$$\langle p^2 \rangle = (-i\hbar)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(t, x) = -\hbar^2 A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{4am^2 x^2}{\hbar^2} - \frac{2am}{\hbar} \right) e^{-\frac{2amx^2}{\hbar}} = am\hbar.$$

(4)

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\hbar}{4am} \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{\hbar}{4am}},$$

$$\sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = am\hbar \quad \Rightarrow \quad \sigma_p = \sqrt{am\hbar}.$$

よって

$$\sigma_x \sigma_p = \frac{\hbar}{2},$$

であるから、不確定性関係を満たしている。