

## 演習問題

2025年6月19日

学籍番号

氏名

**[問 1]** 球面調和関数  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  ( $l \leq 3$ ) の概形を描け。ただし、各方向  $(\theta, \phi)$  について動径  $r$  が  $r = |Y_{lm}(\theta, \phi)|$  となるような面を描くものとし、また  $\arg(Y_{lm}(\theta, \phi)) = 0$  および  $\arg(Y_{lm}(\theta, \phi)) = \pm\pi$  となる方向を濃淡で示すこと。

			$(0, 0)$			
		$(1, -1)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$		
	$(2, -2)$	$(2, -1)$	$(2, 0)$	$(2, 1)$	$(2, 2)$	
$(3, -3)$	$(3, -2)$	$(3, -1)$	$(3, 0)$	$(3, 1)$	$(3, 2)$	$(3, 3)$

**[問 2]**

(1) 球面調和関数の定義

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta),$$

を用いて  $Y_{00}(\theta, \phi), Y_{21}(\theta, \phi), Y_{32}(\theta, \phi)$  を構成せよ。Legendre 多項式  $P_l(x)$  に対する Rodrigues の公式、および Legendre 陪関数  $P_l^m(x)$  の定義

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left( \frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l, \quad P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{d}{dx} \right)^m P_l(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{d}{dx} \right)^{l+m} (x^2 - 1)^l,$$

も参照せよ。

(2)  $Y_{00}(\theta, \phi), Y_{21}(\theta, \phi)$  が

$$\int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

の意味で規格直交化されていることを確かめよ。ここで  $\int d\Omega = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$  である。

(3)  $Y(\theta, \phi) = Y_{21}(\theta, \phi)$  が  $l=2$  に対する角度方向の Schrödinger 方程式

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} Y(\theta, \phi) \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} Y(\theta, \phi) = -l(l+1)Y(\theta, \phi),$$

を満たしていることを確認せよ。

### [問 3]

3次元無限井戸型ポテンシャルの下での動径方向の Schrödinger 方程式

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} R(r) \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] R(r) = l(l+1)R(r), \quad V(r) = \begin{cases} 0 & (r \leq a), \\ \infty & (r > a), \end{cases}$$

を考える。整数  $l \geq 0$  は与えられているものとする。

(1) 有効ポテンシャル  $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2}$  は常に正であるから、エネルギーの範囲としては  $E > 0$  を考えればよい。1次元 Schrödinger 方程式と同様に  $k := \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$  を用いると、動径方向の Schrödinger 方程式が  $r \leq a$  において

$$\frac{d^2}{dr^2} R(r) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} R(r) + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0,$$

となることを示せ。

(2) 任意の実数  $\alpha$  に対して、球 Bessel 関数  $j_\alpha(x)$  および球 Neumann 関数  $n_\alpha(x)$  は、次の  $f(x)$  に対する球 Bessel 微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) + \frac{2}{x} \frac{d}{dx} f(x) + \left[ 1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2} \right] f(x) = 0,$$

の2つの独立な解を与えるものとして知られている。整数  $\alpha \geq 0$  に対しては、具体形は

$$j_\alpha(x) = (-x)^\alpha \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^\alpha \frac{\sin x}{x}, \quad n_\alpha(x) = -(-x)^\alpha \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^\alpha \frac{\cos x}{x},$$

を用いて求めることができる。まず、 $j_l(kr), n_l(kr)$  が動径方向の Schrödinger 方程式を満たすことを示せ。次に、原点  $r=0$  で  $R(r)$  が正則である (発散しない) という条件から、解が球 Bessel 関数  $j_l(kr)$  に限られることを示せ。

$\frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}$  を Taylor 展開し、 $x \rightarrow 0$  で最も発散する項の振る舞いを見るとよい。