

演習問題

2025 年 5 月 29 日

学籍番号

氏名

[問 1] 時刻 $t = 0$ における $|x\rangle$ 表示の波動関数 $\langle x|\Psi(t=0)\rangle = \Psi(t=0, x)$ が

$$\langle x|\Psi(t=0)\rangle = \frac{A}{x^2 + a^2},$$

で与えられているとする。ここで A, a は正の実数とする。必要であれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(x^2 + 1)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{2},$$

を用いよ。

- (1) 規格化条件より A を a で表せ。
- (2) $\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle, \sigma_x$ を求めよ。
- (3) $|p\rangle$ 表示の波動関数 $\langle p|\Psi(t=0)\rangle$ を求めよ。波動関数の変換則

$$\langle p|\Psi(t=0)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle p|x \rangle \langle x|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx/\hbar} \langle x|\Psi(t=0)\rangle,$$

および留数積分を用いるとよい。

- (4) $\langle p \rangle, \langle p^2 \rangle, \sigma_p$ を求めよ。
- (5) 不確定性関係 $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$ が成り立っていることを確かめよ。

[問 2] 時刻 $t = 0$ において、系の状態 $|\Psi(t=0)\rangle$ が 2 つのエネルギー固有状態 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ の重ね合わせ

$$|\Psi(t=0)\rangle = a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle,$$

で与えられているとする。ただし簡単のため a, b は実数とし、 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ は束縛状態とする。それぞれのエネルギーを E_1, E_2 として、 $|x\rangle$ 表示の波動関数 $\langle x|\Psi(t=0)\rangle = \Psi(t, x)$ は

$$\Psi(t, x) = a\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + b\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar},$$

となる。束縛状態であるから、 $\psi_1(x), \psi_2(x)$ は実関数として一般性を失わない。このときの粒子の存在確率分布は

$$|\Psi(t, x)|^2 = a^2\psi_1(x)^2 + b^2\psi_2(x)^2 + 2ab\psi_1(x)\psi_2(x)\cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t\right),$$

となることを以前に見た。

- (1) 粒子の存在確率は時間の関数として振動する。その振動周期 τ を求めよ。
- (2) 大雑把に $\Delta E := E_2 - E_1, \Delta t := \tau$ とする。 $\Delta E \Delta t$ の値を求め、エネルギーと時間の不確定性関係 $\sigma_H \frac{\sigma_A}{d\langle A \rangle/dt} \geq \frac{\hbar}{2}$ と比較せよ。

[問 3]

(1) 生成消滅演算子は、位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ を用いて

$$\text{消滅演算子 } \hat{a} := \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (i\hat{p} + m\omega\hat{x}), \quad \text{生成演算子 } \hat{a}^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (-i\hat{p} + m\omega\hat{x}),$$

と定義される。 $\hat{x}$ と $\hat{p}$ に成り立つ正準交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を用いて

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1,$$

を示せ。ただし、任意の演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ に対して交換子は $[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ で定義される。

(2) 調和振動子の Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2,$$

が

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right),$$

と表されることを示せ。

(3) 状態 $|\psi\rangle$ が時間に依存しない Schrödinger 方程式 $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ を満たしているとする。このとき、(1)(2) の結果を使うことにより

$$\hat{H}(\hat{a}|\psi\rangle) = (E - \hbar\omega)(\hat{a}|\psi\rangle),$$

$$\hat{H}(\hat{a}^\dagger|\psi\rangle) = (E + \hbar\omega)(\hat{a}^\dagger|\psi\rangle),$$

となることを示せ。これは、

- $\hat{a}|\psi\rangle$ も Schrödinger 方程式の解であり、エネルギー固有値 $E - \hbar\omega$ の固有ベクトルである
- $\hat{a}^\dagger|\psi\rangle$ も Schrödinger 方程式の解であり、エネルギー固有値 $E + \hbar\omega$ の固有ベクトルである

ことを意味している。ただし、 $\hat{a}|\psi\rangle$ も $\hat{a}^\dagger|\psi\rangle$ も 0 ベクトルではないとする。

[問 4] 調和振動子の基底状態 $|\psi_0\rangle$ は $\hat{a}|\psi_0\rangle = 0$ で与えられる。

(1) 基底状態 $|\psi_0\rangle$ の定義式 $\hat{a}|\psi_0\rangle = 0$ に左から $\langle x|$ を掛け、 $\langle x|\hat{x}|\cdots\rangle = x\langle x|\cdots\rangle$ および $\langle x|\hat{p}|\cdots\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|\cdots\rangle$ を用いることにより、 $\psi_0(x) = \langle x|\psi_0\rangle$ に対する微分方程式

$$\left(\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right)\psi_0(x) = 0,$$

を導け。

(2) (1) の微分方程式を解くことで、

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2},$$

が得られることを示せ。