演習問題

2025 年 4 月 24 日　　学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[問 1]

調和振動子

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2.$$

について、励起状態の波動関数を求めよう。

$$\xi := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x,$$

を導入すると、波動関数 $\Psi(t,x) = \psi(x)\varphi(t)$ の $\psi(x)$ 部分について、

$$\psi(\xi) = \left(a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots\right) e^{-\xi^2/2},$$

と展開したときの係数が漸化式

$$a_{j+2} = \frac{(2j+1) - K}{(j+1)(j+2)} a_j \quad (j = 0, 1, \cdots),$$

を満たすことを見た。さらに、波動関数が発散しないためには

$$K = 2n + 1 \quad (n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0),$$

でなければならないことも見た。さて、この漸化式を用いて $\psi_5(x)$ および $\psi_6(x)$ を求めよ。規格化定数は求めなくてよい。また、それらが Hermite 多項式 $H_n(\xi)$ に対する Rodrigues の公式

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}, \qquad H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^n e^{-\xi^2}.$$

を用いて求めた $\psi_5(\xi)$ および $\psi_6(\xi)$ に比例することを確認せよ。

[問 2]

調和振動子の基底状態 $\psi_0(\xi)$ について、波動関数が古典的には禁止されている領域 ($E_0 < V(x)$ となる領域) にも分布していることがわかる。粒子の位置を測定したとき、この古典的な禁止領域に粒子を見つける確率はいくらか、図 1 を参考に大まかに見積もれ。

[問 3]

自由粒子の波動関数 $\Psi(t,x) = \Psi_k(t,x) := e^{ik\left(x - \frac{\hbar k}{2m} t\right)}$ $(-\infty < k < \infty)$ について、確率流

$$j(t,x) = \frac{i\hbar}{2m}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\Psi^*(t,x)\right)\Psi(t,x) - \Psi^*(t,x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\Psi(t,x)\right)\right],$$

を計算せよ。確率流はどちらの向きに流れているか。

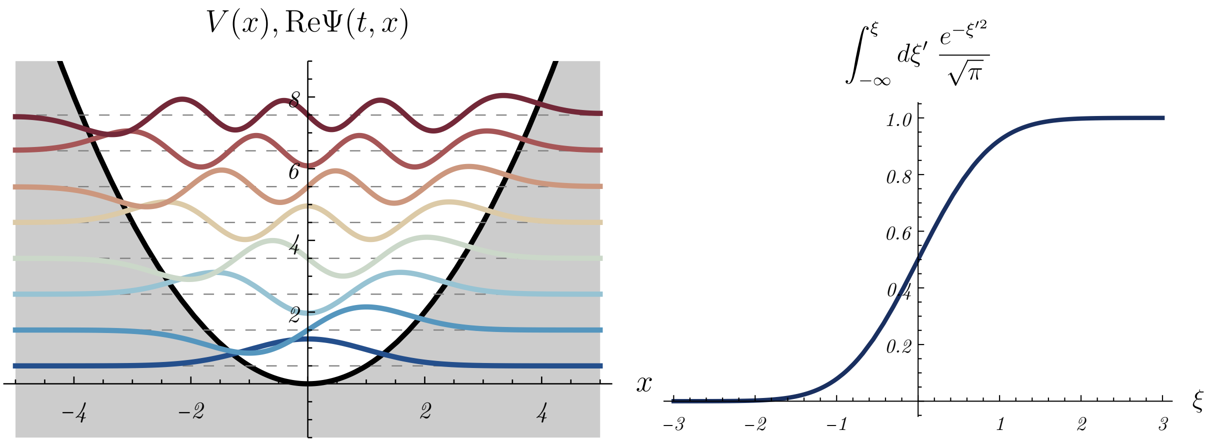

図 1: 調和振動子ポテンシャル (左)、および [問 2] の参考図 (右)。

[問 4]

デルタ関数井戸について、束縛状態の解は

$$\psi_{\text{bound}}(x) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-\frac{m\alpha}{\hbar^2}|x|},$$

と求まった。一方、散乱状態の解は

$$\psi_{\text{scattering}}(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & (x < 0), \\ Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} & (x > 0), \end{cases}$$

$$A + B = F + G, \qquad F - G = (1 + 2i\beta)A - (1 - 2i\beta)B, \qquad \beta := \frac{m\alpha}{\hbar^2 k} = \frac{\alpha}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E}}.$$

と求まった。以下、追加の境界条件 $G = 0$ は指定しないで考えよう。束縛状態の解と散乱状態の解が直交すること

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; \psi^*_{\text{bound}}(x)\psi_{\text{scattering}}(x) = 0,$$

を示せ。