

演習問題

2025 年 4 月 17 日

学籍番号

氏名

[問 1]

Schrödinger 方程式の下で、以下の関係式

Ehrenfest の定理

$$\frac{d}{dt}\langle p \rangle = -\left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle,$$

を示せ。ただし $\langle p \rangle = \left\langle -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(t, x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(t, x)$ である。これは期待値が古典論の運動方程式に従うことを意味しており、Ehrenfest の定理と呼ばれる。

[問 2]

時刻 $t = 0$ における波動関数が

$$\Psi(t = 0, x) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & (-a \leq x \leq a) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases},$$

と表されているとする。ただし A, a は正の実数とする。

- (1) 規格化定数 A を a の関数として表せ。
- (2) $\langle x \rangle$ を求めよ。
- (3) $\langle p \rangle$ を求めよ。
- (4) $\langle x^2 \rangle$ を求めよ。
- (5) $\langle p^2 \rangle$ を求めよ。
- (6) σ_x^2 を求めよ。
- (7) σ_p^2 を求めよ。
- (8) 不確定性関係 $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$ が成り立っていることを確かめよ。

[問 3]

時刻 $t = 0$ において、粒子の波動関数が 2 つの定常状態の重ね合わせ

$$\Psi(t = 0, x) = c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x),$$

にあったとする。 $\psi_1(x), \psi_2(x)$ のエネルギーを E_1, E_2 とし、簡単のため c_1, c_2 は実数とする。一般の時刻 t における波動関数 $\Psi(t, x)$ を書き下せ。また、一般の時刻 t において位置 x に粒子を見出す確率密度 $|\Psi(t, x)|^2$ を書き下し、その振る舞いを見ることで、この状態は定常状態かどうか判定せよ。

[問 4]

空間 1 次元においては、束縛状態に**縮退 (degeneracy)** がないことを背理法により示そう。縮退とは、2 つ (あるいはそれ以上) の異なる波動関数 $\psi_n(x)$ が同じエネルギー固有値を持つことである。「異なる波動関数」という用語について、波動関数 $\psi_1(x), \psi_2(x)$ が定数倍の違いのみであれば同じ波動関数とする。以下の方針に従うとよい。まず、異なる 2 つの波動関数を $\psi_1(x), \psi_2(x)$ とする。時間に依存しない Schrödinger 方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi_1(x) = E_1 \psi_1(x), \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi_2(x) = E_2 \psi_2(x),$$

であるが、縮退がある場合

$$\frac{\frac{d^2}{dx^2} \psi_1(x)}{\psi_1(x)} = \frac{\frac{d^2}{dx^2} \psi_2(x)}{\psi_2(x)},$$

となることを示し、これと各固有関数が無限遠で 0 であることから $\psi_1(x) \propto \psi_2(x)$ を導き、矛盾を示せ。