

演習問題

2025 年 7 月 24 日

学籍番号

氏名

[問 1] スピン角運動量の合成について、交換する演算子の組を理解しよう。以下のように、粒子 1, 粒子 2 に対応した 2 種類のスピンの演算子を導入する

$$\text{粒子 1: } \hat{\mathbf{S}}_1 = \begin{pmatrix} \hat{S}_{1x} \\ \hat{S}_{1y} \\ \hat{S}_{1z} \end{pmatrix}, \quad \text{粒子 2: } \hat{\mathbf{S}}_2 = \begin{pmatrix} \hat{S}_{2x} \\ \hat{S}_{2y} \\ \hat{S}_{2z} \end{pmatrix}.$$

粒子 1 と粒子 2 のスピン演算子は $[\hat{S}_{1i}, \hat{S}_{2j}] = 0$ ($i, j = x, y, z$) および $[\hat{S}_{1i}, \hat{S}_{1j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{S}_{1k}$, $[\hat{S}_{2i}, \hat{S}_{2j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{S}_{2k}$ ($i, j, k = x, y, z$) を満たす。また、それぞれについて昇降演算子は $\hat{S}_{1\pm} := \hat{S}_{1x} \pm i\hat{S}_{1y}$, $\hat{S}_{2\pm} := \hat{S}_{2x} \pm i\hat{S}_{2y}$ で定義される。このとき、粒子 1, 2 を合わせたスピン演算子

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \hat{S}_x \\ \hat{S}_y \\ \hat{S}_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \hat{S}_{1x} + \hat{S}_{2x} \\ \hat{S}_{1y} + \hat{S}_{2y} \\ \hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z} \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2,$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) 全スピン角運動量の二乗が

$$\hat{\mathbf{S}}^2 = \hat{\mathbf{S}}_1^2 + \hat{\mathbf{S}}_2^2 + \hat{S}_{1+}\hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-}\hat{S}_{2+} + 2\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z},$$

と書けることを示せ。

(2) $\hat{\mathbf{S}}^2$ と $\hat{\mathbf{S}}_1^2$ および $\hat{\mathbf{S}}^2$ と $\hat{\mathbf{S}}_2^2$ が交換することを示せ。

(3) $\hat{\mathbf{S}}^2$ と $\hat{S}_{1z}$ および $\hat{\mathbf{S}}^2$ と $\hat{S}_{2z}$ が交換しないことを示せ。

[問 2] スピン $\frac{1}{2}$ の合成を復習しよう。

(1) まず

$$|1, 1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle,$$

から始めて、 $\hat{S}_- = \hat{S}_{1-} + \hat{S}_{2-}$ を作用させることにより $|1, 0\rangle$ および $|1, -1\rangle$ を合成前の状態 $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ で表せ。ここで $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ は略記

$$|\uparrow\uparrow\rangle := \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle, \quad |\uparrow\downarrow\rangle := \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad |\downarrow\uparrow\rangle := \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle, \quad |\downarrow\downarrow\rangle := \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle,$$

であり、また昇降演算子の作用は

$$\hat{S}_{\pm} |s, m\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)} |s, m \pm 1\rangle,$$

である。

(2) 次に、残りの状態

$$|0,0\rangle,$$

が $|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle$ のいずれとも直交していることを利用し、 $|0,0\rangle$ を合成前の状態 $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ で表せ。

[問 3] 波動関数 $\Psi(t, \mathbf{x})$ が荷電粒子の時間に依存する Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \mathbf{x}) = H \Psi(t, \mathbf{x}), \quad H = \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - q\mathbf{A}(t, \mathbf{x}))^2 + q\varphi(t, \mathbf{x}),$$

の解であるとき、

$$\Psi'(t, \mathbf{x}) := e^{\frac{iq\Lambda(t, \mathbf{x})}{\hbar}} \Psi(t, \mathbf{x}),$$

で定義される $\Psi'(t, \mathbf{x})$ は、実関数 $\Lambda(t, \mathbf{x})$ を用いて

$$\varphi'(t, \mathbf{x}) := \varphi(t, \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial t} \Lambda(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{A}'(t, \mathbf{x}) := \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) + \nabla \Lambda(t, \mathbf{x}),$$

と定義される $\varphi'(t, \mathbf{x})$ および $\mathbf{A}'(t, \mathbf{x})$ の下での荷電粒子の Schrödinger 方程式を満たしていることを示せ。

[問 4] 実際の水素原子では、陽子も電子もスピン $\frac{1}{2}$ の粒子なので、それぞれの $\hat{S}_z$ の固有値 $\pm \frac{\hbar}{2}$ に対応する $2 \times 2 = 4$ つのエネルギー準位が基底状態 $(n, l, m) = (1, 0, 0)$ に存在している。しかし実際には、陽子の磁気モーメントと電子の磁気モーメントの相互作用により、この 4 つのエネルギー準位はスピン一重項と三重項の間で分裂している。このエネルギー準位の分裂を超微細構造と言う。磁気モーメント間の相互作用によるエネルギーを考えることにより、超微細構造が

$$\Delta E \sim \alpha^4 \frac{m_e^2}{m_p} c^2,$$

程度のオーダーになることを示せ。