

演習問題

2025 年 7 月 10 日

学籍番号

氏名

[問 1] 昇降演算子 $\hat{L}_{\pm} := \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ について、

$$\hat{L}_+ |l, m\rangle = A_l^m |l, m+1\rangle, \quad \hat{L}_- |l, m\rangle = B_l^m |l, m-1\rangle.$$

に現れる定数 A_l^m, B_l^m を以下の手続きで求めよ。ただし状態 $|l, m\rangle, |l, m\pm 1\rangle$ は規格化されているものとし、 A_l^m, B_l^m は正の実数とする。

(1) 昇降演算子が

$$\hat{L}_{\pm}^{\dagger} = \hat{L}_{\mp},$$

を満たすことを示せ。

(2) 昇降演算子の積が

$$\hat{L}_{\mp}\hat{L}_{\pm} = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 \mp \hbar\hat{L}_z,$$

を満たすことを示せ。ただし $\hat{L}^2 := \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ である。

(3) (2) の結果に左右から $\langle l, m | \cdots | l, m \rangle$ を作用させることで、

$$\begin{aligned} A_l^m &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \quad (= \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)}), \\ B_l^m &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)} \quad (= \hbar\sqrt{(l+m)(l-m+1)}), \end{aligned}$$

を示せ。

[問 2] スピン演算子 $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ が Pauli 行列

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

を用いて

$$\hat{S}_x \stackrel{\text{表示}}{=} \frac{\hbar}{2}\sigma_x, \quad \hat{S}_y \stackrel{\text{表示}}{=} \frac{\hbar}{2}\sigma_y, \quad \hat{S}_z \stackrel{\text{表示}}{=} \frac{\hbar}{2}\sigma_z,$$

と与えられている。

(1) Pauli 行列が

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + i \sum_l \epsilon_{jkl} \sigma_l,$$

を満たすことを示せ。ここで **Levi-Civita 記号** ϵ_{jkl} は

$$\epsilon_{jkl} := \begin{cases} +1 & (j,k,l) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2), \\ -1 & (j,k,l) = (1,3,2), (2,1,3), (3,2,1), \\ 0 & \text{他,} \end{cases}$$

で定義される。

(2) スピン演算子の満たすべき交換関係

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar \hat{S}_z, \quad [\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar \hat{S}_x, \quad [\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar \hat{S}_y,$$

が満たされていることを、行列を計算することにより示せ。

[問 3] 電子のスピン状態 $|\chi\rangle$ が

$$|\chi\rangle \stackrel{\text{表示}}{=} A \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix},$$

で与えられているとする。

(1) 状態 $|\chi\rangle$ を規格化することで定数 A を求めよ。ただし A は正の実数とする。

(2) この状態に対するスピン $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ の期待値を求めよ。ただし $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ は [問 2] のように与えられているとする。

(3) 分散 $\sigma_{\hat{S}_x}^2, \sigma_{\hat{S}_y}^2, \sigma_{\hat{S}_z}^2$ の平方根 $\sigma_{S_x}, \sigma_{S_y}, \sigma_{S_z}$ を求めよ。

(4) 不確定性関係

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle \chi | [\hat{A}, \hat{B}] | \chi \rangle \right)^2,$$

が $\hat{A} = \hat{S}_x, \hat{B} = \hat{S}_y$ に対して成り立っていることを示せ。