

演習問題

2025 年 7 月 3 日

学籍番号

氏名

[問 1] 角運動量演算子について、以下の問に答えよ。

(1) $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$, $[\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar$, $[\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar$ を用いて、交換関係

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z, \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y,$$

を示せ。 $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$ についてのみ示せばよい。

(2) 交換関係

$$\begin{aligned} [\hat{L}_z, \hat{x}] &= i\hbar \hat{y}, & [\hat{L}_z, \hat{y}] &= -i\hbar \hat{x}, & [\hat{L}_z, \hat{z}] &= 0, \\ [\hat{L}_z, \hat{p}_x] &= i\hbar \hat{p}_y, & [\hat{L}_z, \hat{p}_y] &= -i\hbar \hat{p}_x, & [\hat{L}_z, \hat{p}_z] &= 0, \end{aligned}$$

を示せ。

(3) 交換関係

$$[\hat{L}_z, \hat{r}^2] = 0, \quad [\hat{L}_z, \hat{p}^2] = 0,$$

を示せ。ただし $\hat{r}^2 := \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2$, $\hat{p}^2 := \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2$ である。

[問 2] 昇降演算子 $\hat{L}_\pm := \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ について、

$$\hat{L}_+ |l, m\rangle = A_l^m |l, m+1\rangle, \quad \hat{L}_- |l, m\rangle = B_l^m |l, m-1\rangle.$$

に現れる定数 A_l^m , B_l^m を以下の手続きで求めよ。ただし状態 $|l, m\rangle$, $|l, m\pm 1\rangle$ は規格化されているものとし、 A_l^m , B_l^m は正の実数とする。

(1) 昇降演算子が

$$\hat{L}_\pm^\dagger = \hat{L}_\mp,$$

を満たすことを示せ。

(2) 昇降演算子の積が

$$\hat{L}_\mp \hat{L}_\pm = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 \mp \hbar \hat{L}_z,$$

を満たすことを示せ。ただし $\hat{L}^2 := \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ である。

(3) (2) の結果に左右から $\langle l, m | \cdots | l, m \rangle$ を作用させることで、

$$\begin{aligned} A_l^m &= \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \quad (= \hbar \sqrt{(l-m)(l+m+1)}), \\ B_l^m &= \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} \quad (= \hbar \sqrt{(l+m)(l-m+1)}), \end{aligned}$$

を示せ。

[問 3] 全角運動量の二乗に対する表式

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right],$$

を導こう。

(1) 角運動量

$$\mathbf{L} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla,$$

に対し、 $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ および

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

を用いて、

$$\mathbf{L} = -i\hbar \left(\mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right),$$

を示せ。

(2) (1) の結果に、極座標における基底ベクトルと直交座標における基底ベクトルの関係

$$\mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y,$$

を用いると

$$\mathbf{L} = -i\hbar \left[\mathbf{e}_x \left(-\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \mathbf{e}_y \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial \phi} \right],$$

となる。これを用いて、昇降演算子の表式

$$L_\pm = L_x \pm iL_y = \pm \hbar e^{\pm i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \pm \frac{i}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right),$$

を示せ。

(3) 昇降演算子の積が

$$L_\pm L_\mp = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\tan^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \pm i \frac{\partial}{\partial \phi} \right),$$

となることを示し、 $L^2 = L_\pm L_\mp + L_z^2 \mp \hbar L_z$ と合わせて

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right],$$

を示せ。