

演習問題

2025 年 4 月 10 日

学籍番号

氏名

[問 1]

- (1) Planck 定数の次元を MLT を用いて表せ。MLT とは $M = \text{mass(質量)}$ 、 $L = \text{length(長さ)}$ 、 $T = \text{time(時間)}$ を用いた次元の表し方であり、例えば加速度 a は $(\text{長さ})/(\text{時間})^2$ なので、MLT で表すと $[a] = [LT^{-2}]$ となる。
- (2) 作用 S および角運動量 $L = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ の次元を MLT を用いて表せ。作用はラグランジアン の時間積分であること、およびラグランジアンはエネルギーと同じ次元を持っていることを用いるとよい。

[問 2]

Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi(t, x),$$

を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) = -\frac{\partial}{\partial x} j(t, x),$$

を示せ。ただし、確率密度と確率流は

$$\rho(t, x) = |\Psi(t, x)|^2, \quad j(t, x) = \frac{i\hbar}{2m} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi^*(t, x) \right) \Psi(t, x) - \Psi^*(t, x) \left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi(t, x) \right) \right],$$

で定義される。

[問 3]

Schrödinger 方程式の下で、以下の関係式

Ehrenfest の定理

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = - \left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle,$$

を示せ。ただし $\langle p \rangle = \left\langle -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(t, x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(t, x)$ である。これは期待値が古典論の運動方程式に従うことを意味しており、Ehrenfest の定理と呼ばれる。

[問 4]

時刻 $t = 0$ における波動関数が

$$\Psi(t=0, x) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & (-a \leq x \leq a) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases},$$

と表されているとする。ただし A, a は正の実数とする。

- (1) 規格化定数 A を a の関数として表せ。
- (2) $\langle x \rangle$ を求めよ。
- (3) $\langle p \rangle$ を求めよ。
- (4) $\langle x^2 \rangle$ を求めよ。
- (5) $\langle p^2 \rangle$ を求めよ。
- (6) σ_x^2 を求めよ。
- (7) σ_p^2 を求めよ。
- (8) 不確定性関係 $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$ が成り立っていることを確かめよ。

EXTRA PROBLEMS

[問 5]

時刻 $t = 0$ における確率密度 $\rho(t = 0, x)$ が

$$\rho(t = 0, x) = A e^{-\lambda(x-a)^2},$$

で与えられているとする。ここで A, a, λ は正の実数である。

- (1) 規格化定数 A を求めよ。必要であれば、以下の Gauss 積分の導出のヒント

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda x^2} \right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\lambda(x^2+y^2)} = \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-\lambda r^2} = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} d(r^2) \int_0^{2\pi} d\theta e^{-\lambda r^2},$$

を用いよ。

- (2) 期待値 $\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle$ および分散 σ_x^2 を求めよ。
- (3) $\rho(t = 0, x)$ のグラフの概形を描け。

[問 6]

波動関数 $\Psi(t, x)$ が

$$\Psi(t, x) = A e^{-a\left(\frac{mx^2}{\hbar} + it\right)},$$

で与えられているとする。ただし m は考えている粒子の質量であり、 A, a は正の実数とする。

- (1) 規格化定数 A を a, m の関数として表せ。
- (2) どのようなポテンシャル $V(x)$ に対して、上記の波動関数は Schrödinger 方程式の解となっているか。
- (3) 任意の時刻 t における期待値 $\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle p \rangle, \langle p^2 \rangle$ を求めよ。
- (4) 分散 σ_x^2, σ_p^2 を求め、それらが不確定性関係 $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$ に従っていることを確かめよ。