特殊相対論 中間レポート

提出期限 : 2024 年 12 月 9 日 12:00 / 提出先 : 理学研究科 Y 棟 B230 レポートボックス or BEEF

学籍番号 ________________ 氏名 ________________

以下の問いに答えよ。計算過程を適宜記述すること。

[問 1] Lorentz 変換 (配点 : 5 + 5 + 10)

光速度不変の原理から Lorentz 変換を導出する手続きを復習する。Lorentz 変換とは、任意の事象の系 $\mathscr{O}$ における座標 (t,x,y,z) と系 $\overline{\mathscr{O}}$ における座標 $(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ との関係式である。$\mathscr{O}$ と $\overline{\mathscr{O}}$ の空間座標の向きは互いに揃っており、$\overline{\mathscr{O}}$ は $\mathscr{O}$ に対し x 方向に速度 v で動いているとし、y 方向および z 方向は無視して考える。線形変換の範囲内で考えると、最も一般的な変換は

$$\bar{t} = \alpha t + \beta x, \qquad \bar{x} = \gamma t + \sigma x, \tag{1}$$

である。ここで $\alpha,\beta,\gamma,\sigma$ は速度 v にのみ依存する。以下これらの係数が

$$\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(t - vx), \qquad \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(-vt + x), \tag{2}$$

と決定されることを導く。図 1 を参照して以下の問いに答えよ。

(1) $\bar{t}$ 軸 ($\bar{x}=0$ の事象の集合) および $\bar{x}$ 軸 ($\bar{t}=0$ の事象の集合) が $\mathscr{O}$ の時空図でそれぞれ傾き $1/v$ および v の直線であることを用いて、変換 (1) における β および γ を α および σ で表せ。

(2) 事象 $P(\bar{t}=0,\bar{x}=a)$ と事象 $R(\bar{t}=a,\bar{x}=0)$ は光の経路で繋がっていることを用いて、変換 (1) における σ を α で表せ。

(3) 最後に、原点からの距離の不変性

$$-\bar{t}^2 + \bar{x}^2 = -t^2 + x^2,$$

を用いて Lorentz 変換 (2) を導け。

[解 1]

(1) 問題文より、$\bar{t}$ 軸 ($\bar{x}=0$) と $\bar{x}$ 軸 ($\bar{t}=0$) はそれぞれ

$$vt - x = 0, \qquad t - vx = 0,$$

で表される。一方、式 (1) より $\bar{t}$ 軸 ($\bar{x}=0$) と $\bar{x}$ 軸 ($\bar{t}=0$) はそれぞれ $t=-(\sigma/\gamma)x$ および $t=-(\beta/\alpha)x$ で表される。これらが矛盾しないためには

$$\beta = -\alpha v, \qquad \gamma = -\sigma v,$$

である。このとき式 (1) は

$$\bar{t} = \alpha(t - vx), \qquad \bar{x} = \sigma(-vt + x),$$

となる。

(2)　事象 P, R の $\mathscr{O}$ での座標を (t_P, x_P) および (t_R, x_R) とすると、

$$0 = \alpha(t_P - v x_P), \qquad a = \sigma(-v t_P + x_P), \qquad a = \alpha(t_R - v x_R), \qquad 0 = \sigma(-v t_R + x_R),$$
$$\Longrightarrow \qquad t_P = \frac{a}{\sigma}\frac{v}{1-v^2}, \qquad x_P = \frac{a}{\sigma}\frac{1}{1-v^2}, \qquad t_R = \frac{a}{\alpha}\frac{1}{1-v^2}, \qquad x_R = \frac{a}{\alpha}\frac{v}{1-v^2},$$

となる。光速度一定の原理を用い、かつ PR の傾きが -1 であることに注意すると、

$$t_R - t_P = -(x_R - x_P) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\alpha} - \frac{v}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} - \frac{v}{\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma = \alpha,$$

となる。このとき変換 (1) は

$$\bar{t} = \alpha(t - vx), \qquad \bar{x} = \alpha(-vt + x),$$

となる。

(3)　原点からの距離の不変性を用いると

$$-\alpha^2(t - vx)^2 + \alpha^2(x - vt)^2 = -t^2 + x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha^2 = \frac{1}{1-v^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1-v^2}},$$

となる。$v = 0$ のときに恒等変換となるためには $\alpha = +1/\sqrt{1-v^2}$ を選ぶ必要がある。以上より Lorentz 変換 (2) が導かれた。

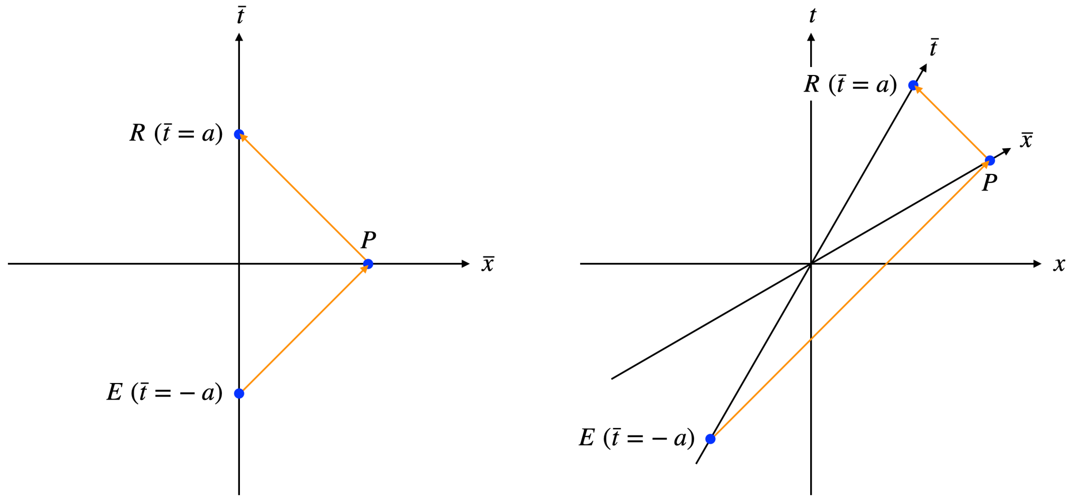

図 1: Lorentz 変換決定のための時空図。

[問 2]　時間の遅れ（配点：5 + 10 + 5）

時間の遅れを復習する。$\mathscr{O}$ と $\overline{\mathscr{O}}$ の空間座標の向きは互いに揃っており、$\overline{\mathscr{O}}$ は $\mathscr{O}$ に対し x 方向に速度 v で動いているとし、y 方向および z 方向は無視して考える。図 2 を参照して以下の問いに答えよ。

(1)　双曲線 DB は不変双曲線、すなわち原点からの距離

$$\Delta s^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 = -\Delta\bar{t}^2 + \Delta\bar{x}^2$$

が一定となるような双曲線である。この双曲線と $\bar{t}$ 軸との交点 B における接線 (図 2 の斜めの点線) は $\bar{x}$ 軸に平行、

すなわち $\bar{\mathscr{O}}$ にとっての同時の線であることを講義で学んだ。これを用いて、$\mathscr{O}$ の時計が A から E まで動くときに記録する時間間隔 Δt_{AE} は、$\bar{\mathscr{O}}$ の時計が A から B まで動くときに記録する時間間隔 $\Delta\bar{t}_{AB}$ より短いことを示せ。

(2)　AB 間の距離と AE 間の距離について、式

$$\Delta s_{AE}^2 = (1 - v^2)\Delta s_{AB}^2,$$

を示せ。

(3)　(2) の結果および B, E が系 $\bar{\mathscr{O}}$ で同時であることから、事象 A, E に着目する限り、$\bar{\mathscr{O}}$ から見ると $\mathscr{O}$ の時計が割合 $\sqrt{1 - v^2}$ で遅れて進むことを示せ。

[解 2]

(1)　D は t 軸上、B は $\bar{t}$ 軸上にあるので

$$\Delta x_{AD} = 0, \qquad \Delta\bar{x}_{AB} = 0,$$

である。距離の不変性より

$$\Delta s_{AB}^2 = -\Delta t_{AB}^2 + \Delta x_{AB}^2 = -\Delta\bar{t}_{AB}^2 + \Delta\bar{x}_{AB}^2,$$

であり、B, D は同一の不変双曲線上にあるので

$$-\Delta t_{AB}^2 + \Delta x_{AB}^2 = -\Delta t_{AD}^2 + \Delta x_{AD}^2,$$

である。よって

$$-\Delta\bar{t}_{AB}^2 + \Delta\bar{x}_{AB}^2 = -\Delta t_{AD}^2 + \Delta x_{AD}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta\bar{t}_{AB}^2 = \Delta t_{AD}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta\bar{t}_{AB} = \Delta t_{AD},$$

である。一方 t 軸上の位置関係より

$$\Delta t_{AE} < \Delta t_{AD},$$

であるから、

$$\Delta t_{AE} < \Delta\bar{t}_{AB},$$

が示される。

(2)　$\mathscr{O}$ の時空図において、AB および EB がそれぞれ傾き $1/v$ および v の直線であることから

$$\frac{\Delta x_{AB}}{\Delta t_{AB}} = v, \qquad \frac{\Delta x_{EB}}{\Delta t_{EB}} = \frac{1}{v},$$

である。これらを $\Delta x_{AB} = \Delta x_{EB}$ と合わせて

$$\Delta t_{EB} = v^2 \Delta t_{AB},$$

を得る。これを

$$\Delta t_{AE} = \Delta t_{AC} - \Delta t_{EC} = \Delta t_{AB} - \Delta t_{EB},$$

に用いると

$$\Delta t_{AE} = (1 - v^2)\Delta t_{AB},$$

を得る。一方

$$\Delta s^2_{AE} \overset{\Delta x_{AE}=0}{=} -\Delta t^2_{AE}, \qquad \Delta s^2_{AB} \overset{\Delta x_{AE}=0}{=} -\Delta t^2_{AB} + \Delta x^2_{AB} \overset{\frac{\Delta x_{AB}}{\Delta t_{AB}}=v}{=} -(1 - v^2)\Delta t^2_{AB},$$

であるから、

$$\Delta s^2_{AE} = -\Delta t^2_{AE} = -(1 - v^2)^2\Delta t^2_{AB} = (1 - v^2)\Delta s^2_{AB},$$

が示される。

(3)　(2) 最終式において、A, E が $\mathscr{O}$ において同一空間座標であること、および A, B が $\overline{\mathscr{O}}$ において同一空間座標であること

$$\Delta s^2_{AE} \overset{\Delta x_{AE}=0}{=} -\Delta t^2_{AE}, \qquad \Delta s^2_{AB} \overset{\Delta \bar{x}_{AB}=0}{=} -\Delta \bar{t}^2_{AB},$$

を用いると

$$\Delta t_{AE} = \sqrt{1 - v^2}\,\Delta \bar{t}_{AB},$$

を得る。これと B, E が $\overline{\mathscr{O}}$ において同一時刻であること

$$\Delta \bar{t}_{AB} = \Delta \bar{t}_{AE},$$

から

$$\Delta t_{AE} = \sqrt{1 - v^2}\,\Delta \bar{t}_{AE},$$

となる。よって事象 A, E に注目する限り、$\mathscr{O}$ の時計は $\overline{\mathscr{O}}$ の時計より $\sqrt{1 - v^2}$ の割合で遅れて進んでいる。

[問 3]　速度の合成 (配点 : 5 + 5 + 10)

速度の合成則を復習する。$\mathscr{O}$ と $\overline{\mathscr{O}}$ の空間座標の向きは互いに揃っており、$\overline{\mathscr{O}}$ は $\mathscr{O}$ に対し x 方向に速度 v で動いているとし、y 方向および z 方向は無視して考える。このとき、$\overline{\mathscr{O}}$ において $\bar{x}$ 方向に速度 $u_{\overline{\mathscr{O}}}$ を持つ粒子の、$\mathscr{O}$ における速度 $u_{\mathscr{O}}$ が

$$u_{\mathscr{O}} = \frac{u_{\overline{\mathscr{O}}} + v}{1 + u_{\overline{\mathscr{O}}}v}, \tag{3}$$

で与えられることを Lorentz 変換を用いて導く。ただし速度 $u_{\mathscr{O}}$ および $u_{\overline{\mathscr{O}}}$ とはそれぞれ三元速度の第 1 成分 $\frac{dx^1}{dx^0}$ および $\frac{dx^{\bar{1}}}{dx^{\bar{0}}}$ のことである。

(1)　この粒子の世界線上の微小変位 $\Delta\vec{x}$ を考える。$\Delta\vec{x}$ の $\mathscr{O}$ および $\overline{\mathscr{O}}$ における成分をそれぞれ

$$\Delta\vec{x} \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (\Delta t, \Delta x), \qquad \Delta\vec{x} \underset{\overline{\mathscr{O}}}{\rightarrow} (\Delta\bar{t}, \Delta\bar{x}),$$

とする。Lorentz 変換 (2) を用いて、Δt および Δx を $\Delta\bar{t}$ および $\Delta\bar{x}$ を用いて表せ。

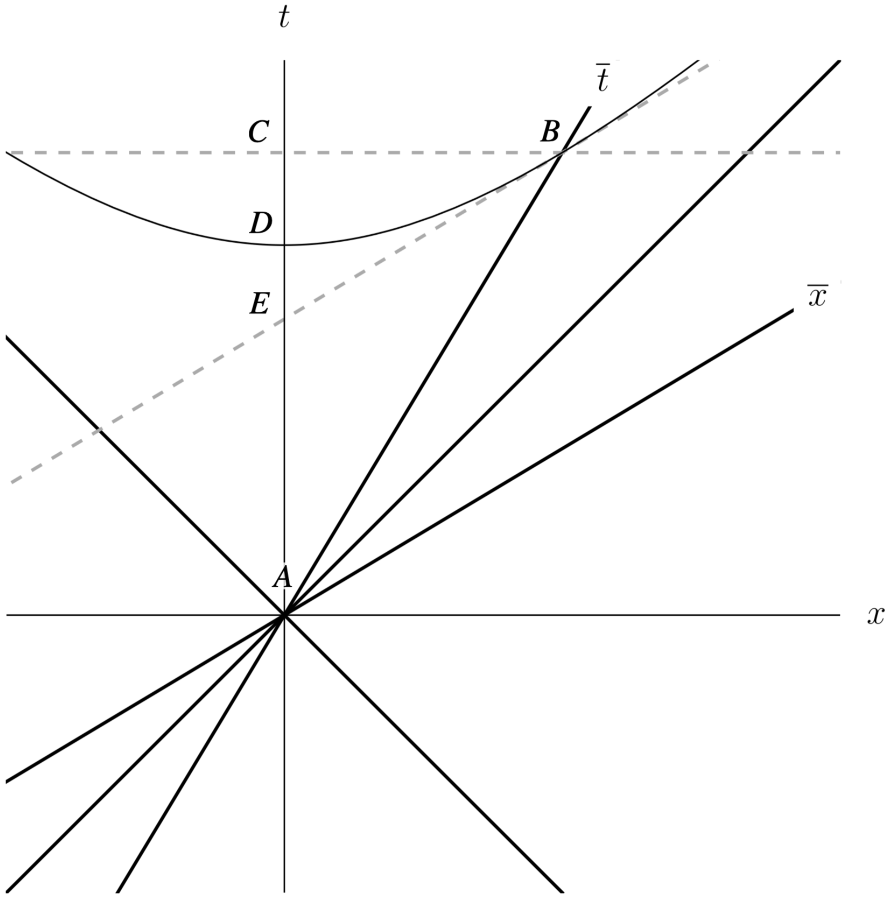

図 2: 時間の遅れを求めるための時空図。

(2)　(1) の結果を用いて、速度の合成則 (3) を示せ。

(3)　速度 v および $u_{\overline{\mathscr{O}}}$ をパラメータ η および $\eta_{\overline{\mathscr{O}}}$ を用いて

$$v = \tanh\eta \qquad u_{\overline{\mathscr{O}}} = \tanh\eta_{\overline{\mathscr{O}}},$$

と表したとき、速度 $u_{\mathscr{O}}$ は

$$u_{\mathscr{O}} = \tanh(\eta + \eta_{\overline{\mathscr{O}}}),$$

となることを示せ。ここに現れる η たちは rapidity と呼ばれる。

[解 3]

(1)　Lorentz 変換 (2) より

$$\Delta\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\Delta\bar{t} + v\Delta\overline{x}\right), \qquad \Delta\overline{x} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(v\Delta\bar{t} + \Delta\overline{x}\right),$$

となる。

(2)　系 $\mathscr{O}$ および系 $\overline{\mathscr{O}}$ での粒子の速度がそれぞれ $\Delta x/\Delta t$ および $\Delta\overline{x}/\Delta\bar{t}$ で与えられることを用いると、

$$u_{\mathscr{O}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v\Delta\bar{t} + \Delta\overline{x}}{\Delta\bar{t} + v\Delta\overline{x}} = \frac{v + \Delta\overline{x}/\Delta\bar{t}}{1 + v\Delta\overline{x}/\Delta\bar{t}} = \frac{v + u_{\overline{\mathscr{O}}}}{1 + vu_{\overline{\mathscr{O}}}},$$

となるので示された。

(3)　(2) で導いた速度の合成則に代入すると

$$u_{\mathscr{O}} = \frac{v + u_{\overline{\mathscr{O}}}}{1 + v u_{\overline{\mathscr{O}}}} = \frac{\tanh\eta + \tanh\eta_{\overline{\mathscr{O}}}}{1 + \tanh\eta \tanh\eta_{\overline{\mathscr{O}}}} = \tanh(\eta + \eta_{\overline{\mathscr{O}}}),$$

となるので示された。

[問 4]　四元速度・四元加速度 (配点 : 10 + 10)

四元速度・四元加速度について復習する。四元速度 $\vec{U}$ の定義は瞬間的共動座標系 (MCR 系) における時間方向の単位大きさのベクトルであるが、その成分 U^μ は固有時間 τ を用いて

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau},$$

と表すことができる。ここで固有時間 τ は粒子と共に動く時計が刻む時刻であり、

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \ (= -ds^2),$$

の関係がある。また、四元加速度 $\vec{a}$ の成分 a^μ は

$$a^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2},$$

で与えられる。

(1)　粒子の世界線が系 $\mathscr{O}$ において定数 a および ω を用いて

$$x(t) = a\cos\omega t, \qquad y(t) = a\sin\omega t, \qquad z(t) = 0, \qquad |a\omega| < 1,$$

と与えられているとき、この粒子の四元速度と四元加速度の系 $\mathscr{O}$ における成分を求めよ。

(2)　四元加速度 $\vec{a}$ の空間的方向が一定で、かつその大きさ $\vec{a}^{\,2} = -(a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2$ が一定のとき、粒子は一様に加速されていると言う。粒子の世界線が系 $\mathscr{O}$ においてパラメータ λ および定数 b を用いて

$$t(\lambda) = b\sinh\left(\frac{\lambda}{b}\right), \qquad x(\lambda) = b\cosh\left(\frac{\lambda}{b}\right), \qquad y(\lambda) = 0, \qquad z(\lambda) = 0,$$

と与えられているとき、この粒子は一様に加速されていることを示せ。

[解 4]

(1)　固有時間 τ と系 $\mathscr{O}$ の時間座標 t との関係は

$$d\tau^2 = dt^2 - (-a\omega\sin\omega t\,dt)^2 - (a\omega\cos\omega t\,dt)^2 = (1 - a^2\omega^2)dt^2 \qquad \Longrightarrow \qquad d\tau = \sqrt{1 - a^2\omega^2}\,dt,$$

であるから、四元速度の成分は

$$
\begin{aligned}
U^0 &= \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2\omega^2}}, \\
U^1 &= \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx}{dt} = -\frac{a\omega\sin\omega t}{\sqrt{1-a^2\omega^2}}, \\
U^2 &= \frac{dx^2}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dy}{dt} = \frac{a\omega\cos\omega t}{\sqrt{1-a^2\omega^2}}, \\
U^3 &= \frac{dx^3}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dz}{dt} = 0,
\end{aligned}
$$

となる。また、四元加速度の成分は

$$
\begin{aligned}
a^0 &= \frac{dU^0}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dU^0}{dt} = 0, \\
a^1 &= \frac{dU^1}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dU^1}{dt} = -\frac{a\omega^2\cos\omega t}{1-a^2\omega^2}, \\
a^2 &= \frac{dU^2}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dU^2}{dt} = -\frac{a\omega^2\sin\omega t}{1-a^2\omega^2}, \\
a^3 &= \frac{dU^3}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dU^3}{dt} = 0,
\end{aligned}
$$

となる。

(2) 固有時間 τ と系 $\mathscr{O}$ の時間座標 t との関係は

$$
d\tau^2 = dt^2 - dx^2 = d\lambda^2\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - d\lambda^2\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 = d\lambda^2\left(\cosh\left(\frac{\lambda}{b}\right)\right)^2 - d\lambda^2\left(\sinh\left(\frac{\lambda}{b}\right)\right)^2 = d\lambda^2 \qquad \Longrightarrow \qquad d\tau = d\lambda,
$$

であるから、パラメータ λ は固有時間 τ そのものであることがわかる。四元速度の成分は

$$
\begin{aligned}
U^0 &= \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d\lambda}{d\tau}\frac{dt}{d\lambda} = \cosh\left(\frac{\lambda}{b}\right), \\
U^1 &= \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{d\lambda}{d\tau}\frac{dx}{d\lambda} = \sinh\left(\frac{\lambda}{b}\right), \\
U^2 &= \frac{dx^2}{d\tau} = \frac{d\lambda}{d\tau}\frac{dy}{d\lambda} = 0, \\
U^3 &= \frac{dx^3}{d\tau} = \frac{d\lambda}{d\tau}\frac{dz}{d\lambda} = 0,
\end{aligned}
$$

となり、また四元加速度の成分は

$$
\begin{aligned}
a^0 &= \frac{dU^0}{d\tau} = \frac{d\lambda}{d\tau}\frac{dU^0}{d\lambda} = \frac{1}{b}\sinh\left(\frac{\lambda}{b}\right), \\
a^1 &= \frac{dU^1}{d\tau} = \frac{d\lambda}{d\tau}\frac{dU^1}{d\lambda} = \frac{1}{b}\cosh\left(\frac{\lambda}{b}\right), \\
a^2 &= \frac{dU^2}{d\tau} = \frac{d\lambda}{d\tau}\frac{dU^2}{d\lambda} = 0, \\
a^3 &= \frac{dU^3}{d\tau} = \frac{d\lambda}{d\tau}\frac{dU^3}{d\lambda} = 0,
\end{aligned}
$$

となるから、四元加速度は常に空間的方向が x 方向を向いており、大きさは

$$
\vec{a}^{\,2} = -(a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 = \frac{1}{b^2},
$$

となっているので、確かにこの粒子は一様に加速されている。

[問 5] 四元運動量 (配点 : 10 + 10)

四元運動量について復習する。四元運動量 $\vec{p}$ は、質量 $m > 0$ であるような粒子については、四元速度 $\vec{U} = \frac{d\vec{x}}{d\tau}$ を用いて

$$\vec{p} = m\vec{U},$$

と与えられる。また、四元運動量の第 0 成分 p^0 はエネルギーと呼ばれる。以下、必要があれば、四元速度の大きさが $\vec{U}^2 = -1$ であることから従う式

$$\vec{p}^{\,2} = -(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = -m^2,$$

を用いよ。また、光速 $c = 1$ の単位系を用いているので、エネルギーおよび静止質量の単位はどちらも kg でよい。

(1) 四元運動量の成分が $\vec{p} \underset{\mathcal{O}}{\to} (3, 1, 1, 0)\,\mathrm{kg}$ で与えられる粒子のエネルギー、静止質量、三元速度 $\boldsymbol{v} = \left(\frac{dx^1}{dx^0}, \frac{dx^2}{dx^0}, \frac{dx^3}{dx^0}\right) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ を求めよ。

(2) 四元運動量の成分が

$$\vec{p}_1 \underset{\mathcal{O}}{\to} (2, 1, 0, 0)\,\mathrm{kg}, \qquad \vec{p}_2 \underset{\mathcal{O}}{\to} (4, 2, 1, 0)\,\mathrm{kg},$$

であるような 2 つの粒子が衝突し、3 つの粒子に変化した。3 つのうち 2 つの粒子の四元運動量の成分は

$$\vec{p}_3 \underset{\mathcal{O}}{\to} (1, 1, 0, 0)\,\mathrm{kg}, \qquad \vec{p}_4 \underset{\mathcal{O}}{\to} (1, -1, 0, 0)\,\mathrm{kg},$$

であった。残り 1 つの粒子の四元運動量 $\vec{p}_5$ の成分を、四元運動量の保存を用いて求めよ。また、この粒子のエネルギー、静止質量、三元速度 $\boldsymbol{v} = \left(\frac{dx^1}{dx^0}, \frac{dx^2}{dx^0}, \frac{dx^3}{dx^0}\right) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ を求めよ。

[解 5]

(1) エネルギーは定義上

$$p^0 = 3\,\mathrm{kg},$$

である。静止質量は

$$m^2 = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = 7\,\mathrm{kg}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad m = \sqrt{7}\,\mathrm{kg},$$

となる。四元運動量の成分は

$$\vec{p} = mU^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} \qquad \Longrightarrow \qquad p^0 = m\frac{dx^0}{d\tau}, \qquad p^1 = m\frac{dx^1}{d\tau}, \qquad p^2 = m\frac{dx^2}{d\tau}, \qquad p^3 = m\frac{dx^3}{d\tau},$$

で与えられるから、三元速度は

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{dx^1}{dx^0}, \frac{dx^2}{dx^0}, \frac{dx^3}{dx^0}\right) = \left(\frac{p^1}{p^0}, \frac{p^2}{p^0}, \frac{p^3}{p^0}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right),$$

となる。

(2) 四元運動量の保存より

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 + \vec{p}_5,$$

であるから、

$$\vec{p}_5 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4 \underset{\mathscr{O}}{\to} (4, 3, 1, 0)\,\mathrm{kg},$$

となる。よってエネルギーは $E = (p_5)^0 = 4\,\mathrm{kg}$ である。静止質量は

$$m^2 = (p_5^0)^2 - (p_5^1)^2 - (p_5^2)^2 - (p_5^3)^2 = 6\,\mathrm{kg}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad m = \sqrt{6}\,\mathrm{kg},$$

となる。三元速度は

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{dx^1}{dx^0}, \frac{dx^2}{dx^0}, \frac{dx^3}{dx^0}\right) = \left(\frac{p^1}{p^0}, \frac{p^2}{p^0}, \frac{p^3}{p^0}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0\right),$$

となる。