特殊相対論 中間レポート

提出期限 : 2024 年 12 月 9 日 12:00 / 提出先 : 理学研究科 Y 棟 B230 レポートボックス or BEEF

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

以下の問いに答えよ。計算過程を適宜記述すること。

[問 1] Lorentz 変換 (配点 : 5 + 5 + 10)

光速度不変の原理から Lorentz 変換を導出する手続きを復習する。Lorentz 変換とは、任意の事象の系 $\mathscr{O}$ における座標 (t, x, y, z) と系 $\overline{\mathscr{O}}$ における座標 $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ との関係式である。$\mathscr{O}$ と $\overline{\mathscr{O}}$ の空間座標の向きは互いに揃っており、$\overline{\mathscr{O}}$ は $\mathscr{O}$ に対し x 方向に速度 v で動いているとし、y 方向および z 方向は無視して考える。線形変換の範囲内で考えると、最も一般的な変換は

$$\bar{t} = \alpha t + \beta x, \qquad \bar{x} = \gamma t + \sigma x, \tag{1}$$

である。ここで $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ は速度 v にのみ依存する。以下これらの係数が

$$\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(t - vx), \qquad \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(-vt + x), \tag{2}$$

と決定されることを導く。図 1 を参照して以下の問いに答えよ。

(1) $\bar{t}$ 軸 ($\bar{x} = 0$ の事象の集合) および $\bar{x}$ 軸 ($\bar{t} = 0$ の事象の集合) が $\mathscr{O}$ の時空図でそれぞれ傾き $1/v$ および v の直線であることを用いて、変換 (1) における β および γ を α および σ で表せ。

(2) 事象 $P(\bar{t} = 0, \bar{x} = a)$ と事象 $R(\bar{t} = a, \bar{x} = 0)$ は光の経路で繋がっていることを用いて、変換 (1) における σ を α で表せ。

(3) 最後に、原点からの距離の不変性

$$-\bar{t}^2 + \bar{x}^2 = -t^2 + x^2,$$

を用いて Lorentz 変換 (2) を導け。

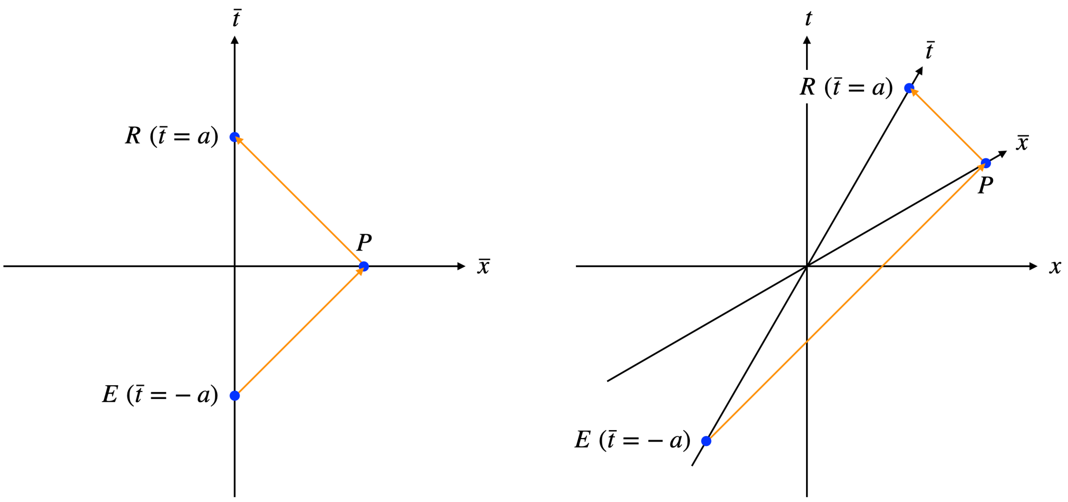

図 1: Lorentz 変換決定のための時空図。

[問 2] 時間の遅れ (配点 : 5 + 10 + 5)

時間の遅れを復習する。$\mathcal{O}$ と $\overline{\mathcal{O}}$ の空間座標の向きは互いに揃っており、$\overline{\mathcal{O}}$ は $\mathcal{O}$ に対し x 方向に速度 v で動いているとし、y 方向および z 方向は無視して考える。図 2 を参照して以下の問いに答えよ。

(1) 双曲線 DB は不変双曲線、すなわち原点からの距離

$$\Delta s^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 = -\Delta\bar{t}^2 + \Delta\bar{x}^2$$

が一定となるような双曲線である。この双曲線と $\bar{t}$ 軸との交点 B における接線 (図 2 の斜めの点線) は $\bar{x}$ 軸に平行、すなわち $\overline{\mathcal{O}}$ にとっての同時の線であることを講義で学んだ。これを用いて、$\mathcal{O}$ の時計が A から E まで動くときに記録する時間間隔 Δt_{AE} は、$\overline{\mathcal{O}}$ の時計が A から B まで動くときに記録する時間間隔 $\Delta\bar{t}_{AB}$ より短いことを示せ。

(2) AB 間の距離と AE 間の距離について、式

$$\Delta s_{AE}^2 = (1 - v^2)\Delta s_{AB}^2,$$

を示せ。

(3) (2) の結果および B, E が系 $\overline{\mathcal{O}}$ で同時であることから、事象 A, E に着目する限り、$\overline{\mathcal{O}}$ から見ると $\mathcal{O}$ の時計が割合 $\sqrt{1-v^2}$ で遅れて進むことを示せ。

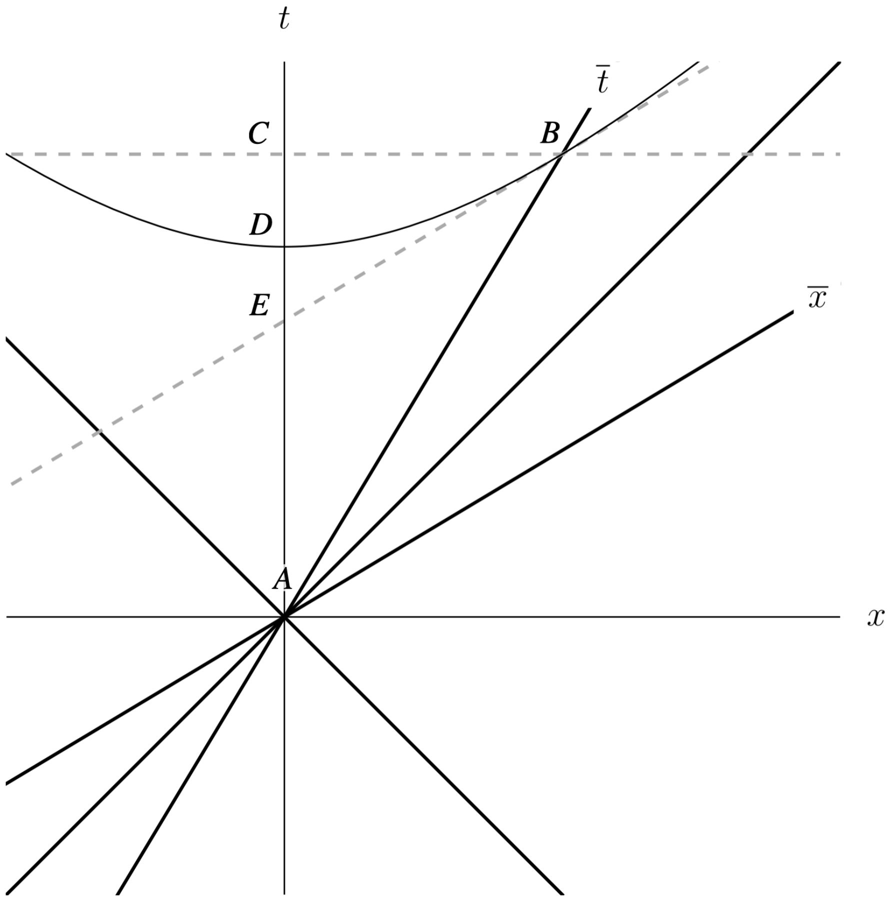

図 2: 時間の遅れを求めるための時空図。

[問 3] 速度の合成 (配点 : 5 + 5 + 10)

速度の合成則を復習する。$\mathscr{O}$ と $\overline{\mathscr{O}}$ の空間座標の向きは互いに揃っており、$\overline{\mathscr{O}}$ は $\mathscr{O}$ に対し x 方向に速度 v で動いているとし、y 方向および z 方向は無視して考える。このとき、$\overline{\mathscr{O}}$ において $\bar{x}$ 方向に速度 $u_{\overline{\mathscr{O}}}$ を持つ粒子の、$\mathscr{O}$ における速度 $u_{\mathscr{O}}$ が

$$u_{\mathscr{O}} = \frac{u_{\overline{\mathscr{O}}} + v}{1 + u_{\overline{\mathscr{O}}} v}, \tag{3}$$

で与えられることを Lorentz 変換を用いて導く。ただし速度 $u_{\mathscr{O}}$ および $u_{\overline{\mathscr{O}}}$ とはそれぞれ三元速度の第 1 成分 $\frac{dx^1}{dx^0}$ および $\frac{dx^{\bar{1}}}{dx^{\bar{0}}}$ のことである。

(1)　この粒子の世界線上の微小変位 $\Delta\vec{x}$ を考える。$\Delta\vec{x}$ の $\mathscr{O}$ および $\overline{\mathscr{O}}$ における成分をそれぞれ

$$\Delta\vec{x} \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (\Delta t, \Delta x), \qquad \Delta\vec{x} \underset{\overline{\mathscr{O}}}{\rightarrow} (\Delta\bar{t}, \Delta\bar{x}),$$

とする。Lorentz 変換 (2) を用いて、Δt および Δx を $\Delta\bar{t}$ および $\Delta\bar{x}$ を用いて表せ。

(2)　(1) の結果を用いて、速度の合成則 (3) を示せ。

(3)　速度 v および $u_{\overline{\mathscr{O}}}$ をパラメータ η および $\eta_{\overline{\mathscr{O}}}$ を用いて

$$v = \tanh\eta \qquad u_{\overline{\mathscr{O}}} = \tanh\eta_{\overline{\mathscr{O}}},$$

と表したとき、速度 $u_{\mathscr{O}}$ は

$$u_{\mathscr{O}} = \tanh(\eta + \eta_{\overline{\mathscr{O}}}),$$

となることを示せ。ここに現れる η たちは rapidity と呼ばれる。

[問 4] 四元速度・四元加速度 (配点 : 10 + 10)

四元速度・四元加速度について復習する。四元速度 $\vec{U}$ の定義は瞬間的共動座標系 (MCR 系) における時間方向の単位大きさのベクトルであるが、その成分 U^μ は固有時間 τ を用いて

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau},$$

と表すことができる。ここで固有時間 τ は粒子と共に動く時計が刻む時刻であり、

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \ (= -ds^2),$$

の関係がある。また、四元加速度 $\vec{a}$ の成分 a^μ は

$$a^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2},$$

で与えられる。

(1)　粒子の世界線が系 $\mathscr{O}$ において定数 a および ω を用いて

$$x(t) = a\cos\omega t, \qquad y(t) = a\sin\omega t, \qquad z(t) = 0, \qquad |a\omega| < 1,$$

と与えられているとき、この粒子の四元速度と四元加速度の系 $\mathscr{O}$ における成分を求めよ。

(2)　四元加速度 $\vec{a}$ の空間的方向が一定で、かつその大きさ $\vec{a}^{\,2} = -(a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2$ が一定のとき、粒子は一様に加速されていると言う。粒子の世界線が系 $\mathscr{O}$ においてパラメータ λ および定数 b を用いて

$$t(\lambda) = b\sinh\left(\frac{\lambda}{b}\right), \qquad x(\lambda) = b\cosh\left(\frac{\lambda}{b}\right), \qquad y(\lambda) = 0, \qquad z(\lambda) = 0,$$

と与えられているとき、この粒子は一様に加速されていることを示せ。

[問 5] 四元運動量 (配点 : 10 + 10)

四元運動量について復習する。四元運動量 $\vec{p}$ は、質量 $m > 0$ であるような粒子については、四元速度 $\vec{U} = \frac{d\vec{x}}{d\tau}$ を用いて

$$\vec{p} = m\vec{U},$$

と与えられる。また、四元運動量の第 0 成分 p^0 はエネルギーと呼ばれる。以下、必要があれば、四元速度の大きさが $\vec{U}^2 = -1$ であることから従う式

$$\vec{p}^{\,2} = -(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = -m^2,$$

を用いよ。また、光速 $c = 1$ の単位系を用いているので、エネルギーおよび静止質量の単位はどちらも kg でよい。

(1)　四元運動量の成分が $\vec{p} \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (3, 1, 1, 0)\,\mathrm{kg}$ で与えられる粒子のエネルギー、静止質量、三元速度 $\boldsymbol{v} = \left(\frac{dx^1}{dx^0}, \frac{dx^2}{dx^0}, \frac{dx^3}{dx^0}\right) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ を求めよ。

(2)　四元運動量の成分が

$$\vec{p}_1 \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (2, 1, 0, 0)\,\mathrm{kg}, \qquad \vec{p}_2 \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (4, 2, 1, 0)\,\mathrm{kg},$$

であるような 2 つの粒子が衝突し、3 つの粒子に変化した。3 つのうち 2 つの粒子の四元運動量の成分は

$$\vec{p}_3 \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (1, 1, 0, 0)\,\mathrm{kg}, \qquad \vec{p}_4 \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (1, -1, 0, 0)\,\mathrm{kg},$$

であった。残り 1 つの粒子の四元運動量 $\vec{p}_5$ の成分を、四元運動量の保存を用いて求めよ。また、この粒子のエネルギー、静止質量、三元速度 $\boldsymbol{v} = \left(\frac{dx^1}{dx^0}, \frac{dx^2}{dx^0}, \frac{dx^3}{dx^0}\right) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ を求めよ。