特殊相対性理論　期末試験

2025/2/3(月) 15:10-16:40

- 計算の途中過程を記述すること。
- 光速 $c = 1$ の単位系を用いる。
- 系 $\mathscr{O}$ の座標を $\{x^\alpha\} = (t, x, y, z)$、系 $\overline{\mathscr{O}}$ の座標を $\{x^{\overline{\alpha}}\} = (\bar{t}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ とする。
- メトリックテンソル $\boldsymbol{g}$ の成分 $\eta_{\mu\nu}$ は $[\eta_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられる。
- 任意のベクトル $\vec{V}$ の大きさは $\vec{V}^2 = \eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$ で、任意のベクトル $\vec{V}, \vec{W}$ のスカラー積は $\vec{V} \cdot \vec{W} = \eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu$ で与えられる。
- 下付きのカンマは微分 $f_{,\alpha} = \dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ を表す。
- その他、記法は指定教科書『シュッツ 相対論入門 I 特殊相対論』に従う。

I (配点 50 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10)

問 1 系 $\overline{\mathscr{O}}$ は系 $\mathscr{O}$ に対し x 方向に速度 v で動いているとする。このとき Lorentz 変換は

$$x^\alpha = \Lambda^\alpha{}_{\overline{\beta}}\, x^{\overline{\beta}}, \qquad [\Lambda^\alpha{}_{\overline{\beta}}] = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}},$$

で与えられる。系 $\overline{\mathscr{O}}$ において $\overline{x}$ 方向に速度 $u_{\overline{\mathscr{O}}}$ で動いている物体の、系 $\mathscr{O}$ における x 方向の速度 $u_{\mathscr{O}}$ を $v, u_{\overline{\mathscr{O}}}$ で表せ。

問 2 問 1 と同じ系 $\mathscr{O}, \overline{\mathscr{O}}$ を考える。系 $\overline{\mathscr{O}}$ において $\overline{x}$ 方向に長さ $\Delta\overline{x}$ を持つ静止した棒の両端を、系 $\mathscr{O}$ における同時刻で観測し、その x 座標の差を系 $\mathscr{O}$ における棒の長さ Δx とする。このとき、Δx を $\Delta\overline{x}$ および v を用いて表せ。必要があれば下図を参考に用いよ。

問 3 静止した多数の μ 粒子を用意すると、他の粒子への崩壊により時間 $\Delta\bar{t} = 2.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$ で個数が半減することが知られている。これらの μ 粒子が速度 $v = 0.999$ で動いている系で観測すると、個数が半減する時間 Δt はいくらか。有効数字 1 桁で見積もれ。

問 4 大きさが -1 であるような単位ベクトル $\vec{U}$ を用いて、その成分が

$$P_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + U_\alpha U_\beta,$$

で与えられるテンソル $\boldsymbol{P}$ を考える。

(1) $\boldsymbol{P}$ を任意のベクトル $\vec{V}$ に作用させたベクトル、すなわち成分が $V_\perp^\alpha = P^\alpha{}_\beta V^\beta$ で与えられるベクトル $\vec{V}_\perp$ を考える。$\vec{V}_\perp$ が $\vec{U}$ に垂直であることを示せ。

(2) $\boldsymbol{P}$ を $\vec{V}_\perp$ に作用させると $\vec{V}_\perp$ が得られることを示せ。

問 5 質量 m の粒子を二つ衝突させ、質量 $M\,(>2m)$ の粒子一つを生成する実験を考える。実験方法として

(a) 静止している一方の粒子に他方の粒子を速さ v で衝突させる。

(b) 双方を速さ w で逆向きに衝突させる。

の 2 つを考えたとき、四元運動量の保存を用いて v および w (もしくは $\gamma_v = 1/\sqrt{1-v^2}$ および $\gamma_w = 1/\sqrt{1-w^2}$) を求め、$v, w$ の大小関係を答えよ。

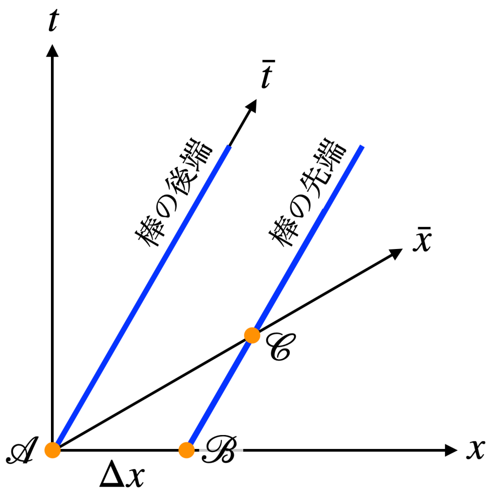

図 1: 系 $\overline{\mathscr{O}}$ において静止した棒を系 $\mathscr{O}$ において観測する際の時空図。

II (配点 25 = 10 + 5 + 10)

光子と電子の散乱である Compton 散乱を考える。(光子とは、光を粒子として取り扱う際の名称である。) 下図のように、衝突前の光子および電子の四元運動量を $\vec{p}_\gamma$ および $\vec{P}_e$ とし、衝突後の光子および電子の四元運動量を $\vec{p}'_\gamma$ および $\vec{P}'_e$ とする。観測者の系 $\mathcal{O}$ におけるこれらの成分を

$$
\begin{array}{lcll}
\text{衝突前} & : & \vec{p}_\gamma \underset{\mathcal{O}}{\rightarrow} (E_\gamma, p^x_\gamma, 0, 0), & \vec{P}_e \underset{\mathcal{O}}{\rightarrow} (E_e, 0, 0, 0), \\
\text{衝突後} & : & \vec{p}'_\gamma \underset{\mathcal{O}}{\rightarrow} (E'_\gamma, p'^x_\gamma, p'^y_\gamma, 0), & \vec{P}'_e \underset{\mathcal{O}}{\rightarrow} (E'_e, P'^x_e, P'^y_e, 0),
\end{array}
$$

として以下の問いに答えよ。

問 1 衝突前後における (a) エネルギー保存 (b) x 方向の運動量保存 (c) y 方向の運動量保存を上記の成分を用いて表せ。

問 2 電子の質量を m_e とする。$\vec{P}'_e$ の成分の間に成り立つ関係式を m_e を用いて表せ。

問 3 光子の質量がゼロであることから、$\vec{p}_\gamma$ の成分の間に関係式が一つ、$\vec{p}'_\gamma$ の成分の間に関係式が一つ成り立つ。また、電子の質量が m_e であることから、問 2 の結果に加えて $\vec{P}_e$ の成分の間に関係式が一つ成り立つ。さて、問 1 の結果を用いて問 2 の結果から E'_e, P'^x_e, P'^y_e を消去し、上述の関係式を用いることで

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e}\left(1 - \frac{p'^x_\gamma}{E'_\gamma}\right),$$

を示せ。(光子の反跳角 θ を用いると $p'^x_\gamma/E'_\gamma = \cos\theta$ となることから、衝突後の光子のエネルギー E'_γ が反跳角の関数として表されたことになる。)

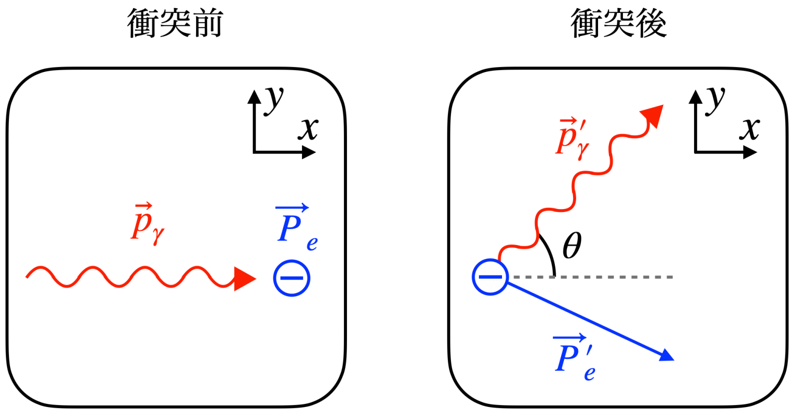

図 2: Compton 散乱の模式図。

III (配点 25 = 10 + 10 + 5)

　完全流体のストレス・エネルギーテンソル $\boldsymbol{T}$ の成分は

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + p\eta^{\mu\nu},$$

で与えられる。ここで ρ および p は流体要素の瞬間的共動座標系 (MCR 系) におけるエネルギー密度および圧力、U^μ は流体要素の四元速度の成分、$\eta^{\mu\nu}$ はメトリックテンソルの逆 $\boldsymbol{g}^{-1}$ の成分である。流体要素の MCR 系における粒子数密度 n に対し、粒子数保存

$$(nU^\mu)_{,\mu} = 0,$$

が成り立っているとして以下の問いに答えよ。

問 1 流体の四元速度 U^μ に対して

$$U^\mu{}_{,\nu} U_\mu = 0,$$

を示せ。

問 2 エネルギー・運動量の保存

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0,$$

に U_μ を掛け、適切に変形することで

$$U^\mu \left[-\rho_{,\mu} + \frac{\rho + p}{n} n_{,\mu} \right] = 0,$$

を示せ。

問 3 流体の一粒子あたりのエントロピー S は

$$nTdS = d\rho - \frac{\rho + p}{n} dn,$$

を満たす。これと問 2 の結果より、粒子数を保存する完全流体が一粒子あたりのエントロピー S を保存することを説明せよ。

I 解 (配点 50 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10)

問 1 Lorentz 変換より

$$t = \gamma(\bar{t} + v\overline{x}), \qquad x = \gamma(v\bar{t} + \overline{x}),$$

であるから、速度 $u_{\mathscr{O}}$ は

$$u_{\mathscr{O}} = \frac{x}{t} = \frac{\gamma(v\bar{t} + \overline{x})}{\gamma(\bar{t} + v\overline{x})} = \frac{v + \overline{x}/\bar{t}}{1 + v\overline{x}/\bar{t}} = \frac{v + u_{\overline{\mathscr{O}}}}{1 + vu_{\overline{\mathscr{O}}}},$$

となる。

問 2 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ の $\bar{t}, \overline{x}$ 座標の差を $\Delta\bar{t}, \Delta\overline{x}$ とし、t, x 座標の差を $\Delta t, \Delta x$ とする。$\overline{x}$ 座標の差が系 $\overline{\mathscr{O}}$ における棒の長さ $\Delta\overline{x}$ となることは、$\mathscr{A}, \mathscr{C}$ の $\overline{x}$ 座標の差が棒の長さ $\Delta\overline{x}$ であること、および $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ の $\overline{x}$ 座標が等しいことからわかる。さて、Lorentz 変換より

$$\Delta t = \gamma(\Delta\bar{t} + v\Delta\overline{x}), \qquad \Delta x = \gamma(v\Delta\bar{t} + \Delta\overline{x}),$$

すなわち

$$\Delta\bar{t} = \gamma(\Delta t - v\Delta x), \qquad \Delta\overline{x} = \gamma(-v\Delta t + \Delta x),$$

であるが、系 $\mathscr{O}$ における同時刻性 $\Delta t = 0$ から

$$\Delta\bar{t} = -\gamma v\Delta x, \qquad \Delta\overline{x} = \gamma\Delta x,$$

を得る。よって系 $\mathscr{O}$ における棒の長さは

$$\Delta x = \frac{\Delta\overline{x}}{\gamma}(< \Delta\overline{x}),$$

となる。これを Lorentz 収縮と言う。

問 3 μ 粒子が静止している系を $\overline{\mathscr{O}}$ とし、速度 v で動いて見える系を $\mathscr{O}$ とする。時空図の原点を $\mathscr{A}$、ある 1 つの μ 粒子が崩壊する事象を $\mathscr{B}$ とし、$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ の $\mathscr{O}$ での座標差を $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$、$\overline{\mathscr{O}}$ での座標差を $(\Delta\bar{t}, \Delta\overline{x}, \Delta\overline{y}, \Delta\overline{z})$ とする。Lorentz 変換より

$$\Delta t = \gamma(\Delta\bar{t} + v\Delta\overline{x}), \qquad \Delta x = \gamma(v\Delta\bar{t} + \Delta\overline{x}),$$

であるが、$\Delta\overline{x} = 0$ より

$$\Delta t = \gamma\Delta\bar{t}, \qquad \Delta x = \gamma v\Delta\bar{t},$$

を得る。よって系 $\mathscr{O}$ における時間差は

$$\Delta t = \gamma \Delta \bar{t},$$

となる。これを時間の遅れと言う。これがどの μ 粒子にも起こるから、個数が半減する時間は

$$\Delta t = \gamma \Delta \bar{t} = \frac{\Delta \bar{t}}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{2.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}}{\sqrt{1 - 0.999^2}} \simeq \frac{2.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}}{0.045} \simeq 5 \times 10^{-5}\,\mathrm{s},$$

となる。

問 4　(1) ベクトル $\vec{V}_\perp$ の成分は問題文より

$$V_\perp^\alpha = P^\alpha{}_\beta V^\beta = (\delta^\alpha_\beta + U^\alpha U_\beta) V^\beta,$$

である。垂直とはスカラー積がゼロとなることであるが、確かに

$$\vec{V}_\perp \cdot \vec{U} = \eta_{\alpha\gamma} V_\perp^\alpha U^\gamma = V_\perp^\alpha U_\alpha = (\delta^\alpha_\beta + U^\alpha U_\beta) V^\beta U_\alpha = (U_\beta + U^\alpha U_\alpha U_\beta) V^\beta \overset{\vec{U}^2=-1}{\equiv} 0,$$

となっている。

(2) $\boldsymbol{P}$ を $\vec{V}_\perp$ に作用させたベクトルの成分は

$$\begin{aligned} P^\alpha{}_\beta V_\perp^\beta &= P^\alpha{}_\beta P^\beta{}_\gamma V^\gamma = (\delta^\alpha_\beta + U^\alpha U_\beta)(\delta^\beta_\gamma + U^\beta U_\gamma) V^\gamma \\ &= (\delta^\alpha_\beta \delta^\beta_\gamma + U^\alpha U_\beta \delta^\beta_\gamma + \delta^\alpha_\beta U^\beta U_\gamma + U^\alpha U_\beta U^\beta U_\gamma) V^\gamma \\ &\overset{\vec{U}^2=-1}{\equiv} (\delta^\alpha_\gamma + U^\alpha U_\gamma + U^\alpha U_\gamma - U^\alpha U_\gamma) V^\gamma \\ &= (\delta^\alpha_\gamma + U^\alpha U_\gamma) V^\gamma = P^\alpha{}_\gamma V^\gamma = V_\perp^\alpha, \end{aligned}$$

であり、確かに $\vec{V}_\perp$ の成分が得られている。

問 5　(a) 衝突前の粒子の四元運動量を

$$\vec{p} \underset{\mathscr{O}}{\to} (E, p, 0, 0), \qquad \vec{q} \underset{\mathscr{O}}{\to} (m, 0, 0, 0),$$

とする。ただし $\vec{p}^2 = -E^2 + p^2 = -m^2$ である。衝突前の全四元運動量は

$$\vec{P} = \vec{p} + \vec{q} \underset{\mathscr{O}}{\to} (E + m, p, 0, 0),$$

であるが、四元運動量の保存より、これが衝突後に生成する粒子の四元運動量になる。生成粒子の質量が M であることから

$$\vec{P}^2 = -M^2,$$
$$\vec{P}^2 = -(E+m)^2 + p^2 = -E^2 - 2Em - m^2 + p^2 \overset{-E^2+p^2=-m^2}{=} -2Em - 2m^2,$$

であり、

$$E = \frac{M^2}{2m} - m,$$

を得る。これと

$$E = m\gamma_v,$$

から

$$\gamma_v = \frac{M^2}{2m^2} - 1,$$

を得る。

(b) 衝突前の粒子の四元運動量を

$$\vec{p} \underset{\mathscr{O}}{\to} (E, p, 0, 0), \qquad \vec{q} \underset{\mathscr{O}}{\to} (E, -p, 0, 0),$$

とする。ただし $\vec{p}^2 = \vec{q}^2 = -E^2 + p^2 = -m^2$ である。衝突前の全四元運動量は

$$\vec{P} = \vec{p} + \vec{q} \underset{\mathscr{O}}{\to} (2E, 0, 0, 0),$$

であるが、四元運動量の保存より、これが衝突後に生成する粒子の四元運動量になる。生成粒子の質量が M であることから

$$\vec{P}^2 = -M^2,$$
$$\vec{P}^2 = -4E^2,$$

であり、

$$E = \frac{M}{2},$$

を得る。これと

$$E = m\gamma_w,$$

から

$$\gamma_w = \frac{M}{2m},$$

を得る。

大小関係については、$M/m > 2$ のとき $\gamma_v > \gamma_w$ であるから、

$$v > w,$$

である。

II 解 (配点 25 = 10 + 5 + 10)

問 1 (a) エネルギー保存：$E_\gamma + E_e = E'_\gamma + E'_e$

(b) x 方向の運動量保存：$p^x_\gamma = P'^x_e + p'^x_\gamma$

(c) y 方向の運動量保存：$0 = p'^y_\gamma + P'^y_e$

問 2 四元運動量の大きさは $\vec{P}'^2_e = -m_e^2$ を満たすから、成分表示すると

$$-(E'_e)^2 + (P'^x_e)^2 + (P'^y_e)^2 = -m_e^2,$$

となる。

問 3 問題文から誘導される関係式は

$$\begin{aligned} -(E_\gamma)^2 + (p^x_\gamma)^2 &= 0, \\ -(E'_\gamma)^2 + (p'^x_\gamma)^2 + (p'^y_\gamma)^2 &= 0, \\ -(E_e)^2 &= -m_e^2, \end{aligned}$$

である。問 1 の結果を用いて問 2 の結果から E'_e, P'^x_e, P'^y_e を消去すると

$$-(E_\gamma + E_e - E'_\gamma)^2 + (p^x_\gamma - p'^x_\gamma)^2 + (p'^y_\gamma)^2 = -m_e^2,$$

であるが、上記の関係式を用いると

$$-m_e^2 - 2E_e(E_\gamma - E'_\gamma) + 2E_\gamma E'_\gamma - 2p^x_\gamma p'^x_\gamma = -m_e^2,$$

が得られる。$E_\gamma = p^x_\gamma$ および $E_e = m_e$ を用いて整理すると

$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e}\left(1 - \frac{p'^x_\gamma}{E'_\gamma}\right),$$

を得る。

III 解 (配点 25 = 10 + 10 + 5)

問 1 流体の四元速度 U^μ は定義上

$$U^\mu U_\mu = -1,$$

を満たすから

$$(U^\mu U_\mu)_{,\nu} = 0,$$

であるが、左辺は

$$(U^\mu U_\mu)_{,\nu} = (U^\alpha U^\beta \eta_{\alpha\beta})_{,\nu} = U^\alpha{}_{,\nu} U^\beta \eta_{\alpha\beta} + U^\alpha U^\beta{}_{,\nu} \eta_{\alpha\beta} = U^\alpha{}_{,\nu} U_\alpha + U_\beta U^\beta{}_{,\nu} = 2U^\mu{}_{,\nu} U_\mu,$$

であるため題意は示された。

問 2 エネルギー・運動量の保存則

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0,$$

に U_μ を掛けると

$$U_\mu \left[(\rho + p) U^\mu U^\nu + p\eta^{\mu\nu}\right]_{,\nu} = 0,$$

であるが、左辺は

$$\begin{aligned}
U_\mu \left[(\rho + p) U^\mu U^\nu + p\eta^{\mu\nu}\right]_{,\nu} &= U_\mu \left[\frac{\rho + p}{n} U^\mu \times n U^\nu + p\eta^{\mu\nu}\right]_{,\nu} \\
&\overset{(nU^\nu)_{,\nu}=0}{=} U_\mu \left[\left(\frac{\rho + p}{n} U^\mu\right)_{,\nu} n U^\nu + p_{,\nu} \eta^{\mu\nu}\right] \\
&\overset{U^\mu{}_{,\nu} U_\mu = 0}{=} U_\mu \left[\left(\frac{\rho + p}{n}\right)_{,\nu} U^\mu n U^\nu + p_{,\nu} \eta^{\mu\nu}\right] \\
&= \left[-\left(\frac{\rho + p}{n}\right)_{,\nu} n U^\nu + p_{,\nu} U^\nu\right] \\
&= U^\mu \left[-\left(\frac{\rho + p}{n}\right)_{,\mu} n + p_{,\mu}\right] \\
&= U^\mu \left[-\rho_{,\mu} + \frac{\rho + p}{n} n_{,\mu}\right],
\end{aligned}$$

となるので

$$U^\mu \left[-\rho_{,\mu} + \frac{\rho + p}{n} n_{,\mu}\right] = 0,$$

が示された。

問 3 問 2 において、$U^\mu \rho_{,\mu}$ および $U^\mu n_{,\mu}$ は流体要素の世界線に沿った ρ および n の微分

$$U^\mu \rho_{,\mu} = \frac{d\rho}{d\tau}, \qquad U^\mu n_{,\mu} = \frac{dn}{d\tau},$$

である。よって

$$\frac{d\rho}{d\tau} - \frac{\rho + p}{n}\frac{dn}{d\tau} = 0,$$

であるが、題意より

$$nTdS = d\rho - (\rho + p)\frac{dn}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad nT\frac{dS}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau} - \frac{\rho + p}{n}\frac{dn}{d\tau},$$

であるため、

$$\frac{dS}{d\tau} = 0,$$

すなわち一粒子あたりのエントロピー S が保存している。