特殊相対性理論　期末試験

2025/2/3(月) 15:10-16:40

- 計算の途中過程を記述すること。
- 光速 $c = 1$ の単位系を用いる。
- 系 $\mathscr{O}$ の座標を $\{x^\alpha\} = (t, x, y, z)$、系 $\overline{\mathscr{O}}$ の座標を $\{x^{\overline{\alpha}}\} = (\bar{t}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ とする。
- メトリックテンソル $\boldsymbol{g}$ の成分 $\eta_{\mu\nu}$ は $[\eta_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられる。
- 任意のベクトル $\vec{V}$ の大きさは $\vec{V}^2 = \eta_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$ で、任意のベクトル $\vec{V}, \vec{W}$ のスカラー積は $\vec{V} \cdot \vec{W} = \eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu$ で与えられる。
- 下付きのカンマは微分 $f_{,\alpha} = \dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ を表す。
- その他、記法は指定教科書『シュッツ 相対論入門 I 特殊相対論』に従う。

I (配点 $50 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10$)

問 1 系 $\overline{\mathscr{O}}$ は系 $\mathscr{O}$ に対し x 方向に速度 v で動いているとする。このとき Lorentz 変換は

$$x^\alpha = \Lambda^\alpha{}_{\overline{\beta}} x^{\overline{\beta}}, \qquad [\Lambda^\alpha{}_{\overline{\beta}}] = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}},$$

で与えられる。系 $\overline{\mathscr{O}}$ において $\overline{x}$ 方向に速度 $u_{\overline{\mathscr{O}}}$ で動いている物体の、系 $\mathscr{O}$ における x 方向の速度 $u_{\mathscr{O}}$ を $v, u_{\overline{\mathscr{O}}}$ で表せ。

問 2 問 1 と同じ系 $\mathscr{O}, \overline{\mathscr{O}}$ を考える。系 $\overline{\mathscr{O}}$ において $\overline{x}$ 方向に長さ $\Delta\overline{x}$ を持つ静止した棒の両端を、系 $\mathscr{O}$ における同時刻で観測し、その x 座標の差を系 $\mathscr{O}$ における棒の長さ Δx とする。このとき、Δx を $\Delta\overline{x}$ および v を用いて表せ。必要があれば下図を参考に用いよ。

問 3 静止した多数の μ 粒子を用意すると、他の粒子への崩壊により時間 $\Delta\bar{t} = 2.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$ で個数が半減することが知られている。これらの μ 粒子が速度 $v = 0.999$ で動いている系で観測すると、個数が半減する時間 Δt はいくらか。有効数字 1 桁で見積もれ。

問 4　大きさが -1 であるような単位ベクトル $\vec{U}$ を用いて、その成分が

$$P_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + U_\alpha U_\beta,$$

で与えられるテンソル $\boldsymbol{P}$ を考える。

(1) $\boldsymbol{P}$ を任意のベクトル $\vec{V}$ に作用させたベクトル、すなわち成分が $V_\perp^\alpha = P^\alpha{}_\beta V^\beta$ で与えられるベクトル $\vec{V}_\perp$ を考える。$\vec{V}_\perp$ が $\vec{U}$ に垂直であることを示せ。

(2) $\boldsymbol{P}$ を $\vec{V}_\perp$ に作用させると $\vec{V}_\perp$ が得られることを示せ。

問 5　質量 m の粒子を二つ衝突させ、質量 $M\,(>2m)$ の粒子一つを生成する実験を考える。実験方法として

(a) 静止している一方の粒子に他方の粒子を速さ v で衝突させる。

(b) 双方を速さ w で逆向きに衝突させる。

の 2 つを考えたとき、四元運動量の保存を用いて v および w (もしくは $\gamma_v = 1/\sqrt{1-v^2}$ および $\gamma_w = 1/\sqrt{1-w^2}$) を求め、$v, w$ の大小関係を答えよ。

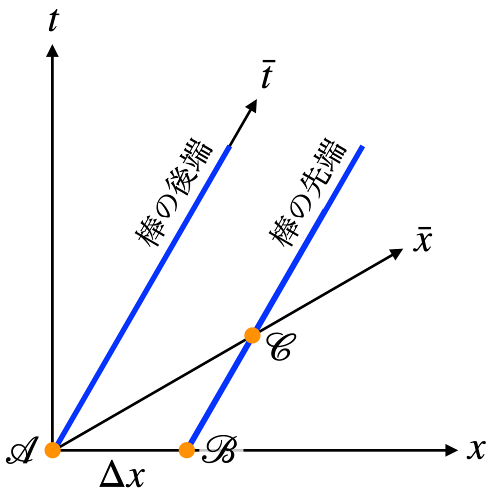

図 1: 系 $\overline{\mathscr{O}}$ において静止した棒を系 $\mathscr{O}$ において観測する際の時空図。

II (配点 25 = 10 + 5 + 10)

光子と電子の散乱である Compton 散乱を考える。(光子とは、光を粒子として取り扱う際の名称である。) 下図のように、衝突前の光子および電子の四元運動量を $\vec{p}_\gamma$ および $\vec{P}_e$ とし、衝突後の光子および電子の四元運動量を $\vec{p}_\gamma'$ および $\vec{P}_e'$ とする。観測者の系 $\mathscr{O}$ におけるこれらの成分を

$$
\begin{array}{llll}
\text{衝突前} & : & \vec{p}_\gamma \underset{\mathscr{O}}{\to} (E_\gamma, p_\gamma^x, 0, 0), & \vec{P}_e \underset{\mathscr{O}}{\to} (E_e, 0, 0, 0), \\
\text{衝突後} & : & \vec{p}_\gamma' \underset{\mathscr{O}}{\to} (E_\gamma', p_\gamma'^x, p_\gamma'^y, 0), & \vec{P}_e' \underset{\mathscr{O}}{\to} (E_e', P_e'^x, P_e'^y, 0),
\end{array}
$$

として以下の問いに答えよ。

問 1 衝突前後における (a) エネルギー保存 (b) x 方向の運動量保存 (c) y 方向の運動量保存を上記の成分を用いて表せ。

問 2 電子の質量を m_e とする。$\vec{P}_e'$ の成分の間に成り立つ関係式を m_e を用いて表せ。

問 3 光子の質量がゼロであることから、$\vec{p}_\gamma$ の成分の間に関係式が一つ、$\vec{p}_\gamma'$ の成分の間に関係式が一つ成り立つ。また、電子の質量が m_e であることから、問 2 の結果に加えて $\vec{P}_e$ の成分の間に関係式が一つ成り立つ。さて、問 1 の結果を用いて問 2 の結果から $E_e', P_e'^x, P_e'^y$ を消去し、上述の関係式を用いることで

$$
\frac{1}{E_\gamma'} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e}\left(1 - \frac{p_\gamma'^x}{E_\gamma'}\right),
$$

を示せ。(光子の反跳角 θ を用いると $p_\gamma'^x / E_\gamma' = \cos\theta$ となることから、衝突後の光子のエネルギー E_γ' が反跳角の関数として表されたことになる。)

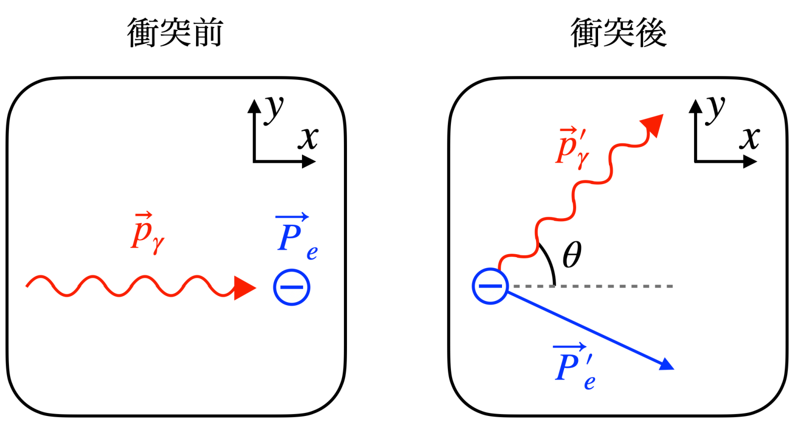

図 2: Compton 散乱の模式図。

III (配点 25 = 10 + 10 + 5)

完全流体のストレス・エネルギーテンソル $\boldsymbol{T}$ の成分は

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + p\eta^{\mu\nu},$$

で与えられる。ここで ρ および p は流体要素の瞬間的共動座標系 (MCR 系) におけるエネルギー密度および圧力、U^μ は流体要素の四元速度の成分、$\eta^{\mu\nu}$ はメトリックテンソルの逆 $\boldsymbol{g}^{-1}$ の成分である。流体要素の MCR 系における粒子数密度 n に対し、粒子数保存

$$(nU^\mu)_{,\mu} = 0,$$

が成り立っているとして以下の問いに答えよ。

問 1 流体の四元速度 U^μ に対して

$$U^\mu{}_{,\nu} U_\mu = 0,$$

を示せ。

問 2 エネルギー・運動量の保存

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0,$$

に U_μ を掛け、適切に変形することで

$$U^\mu \left[-\rho_{,\mu} + \frac{\rho + p}{n} n_{,\mu} \right] = 0,$$

を示せ。

問 3 流体の一粒子あたりのエントロピー S は

$$nTdS = d\rho - \frac{\rho + p}{n} dn,$$

を満たす。これと問 2 の結果より、粒子数を保存する完全流体が一粒子あたりのエントロピー S を保存することを説明せよ。