特殊相対論

神戸大学　神野隆介

jinno@phys.sci.kobe-u.ac.jp

目 次

前書き

以下の内容は、主に

[1] Bernard Schutz, 江里口 良治 (訳), 二間瀬 敏史 (訳),『第 3 版 シュッツ 相対論入門 I 特殊相対論』

[2] 佐藤勝彦,『相対性理論』

を参照している。

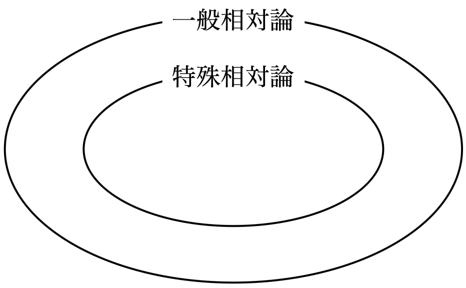
1. 特殊相対論

1.1 特殊相対論の基本原理

本論に入る前に、まず相対性理論 (= 相対論) の分類を知っておこう。

- 特殊相対論：特殊相対性原理と、光速度不変の原理に基づく。
- 一般相対論：一般相対性原理と、等価原理に基づく。

特殊相対論は一般相対論の特別な場合であり、慣性系のみを取り扱う理論である。



特殊相対論の 2 つの原理は以下のように説明できる。

- 特殊相対性原理：任意の慣性基準系は対等であり、任意の慣性基準系において物理法則は同じ形を取る。
- 光速度不変の原理：慣性観測者に対する光速は、その観測者と光源の相対速度に関係なく一定値を取る。

「慣性基準系」「慣性観測者」という用語は以下で説明する。本講義では光速の一定値は $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$ とする[1]。光速度不変の原理が実験的にどう確立されたかは後で見ることにし、ここでは原理として受け入れるものとする。

[1] 厳密には、光速が $c = 299{,}792{,}458\,\mathrm{m/s}$ となるように $1\,\mathrm{m}$ が定義され、また $1\,\mathrm{s}$ はセシウム原子時計を用いて定義されている。本講義では光速の厳密値が問題になることはないので、$c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$ を用いる。

1.2 慣性観測者

本講義において「観測者」とは、基本的に一人の観測者ではなく、一群の観測者であり、座標とも呼ばれる。この一群の観測者はそれぞれに座標 (x,y,z) が割り当てられており、各観測者は時間 t を記録している。この一群の観測者を次のように配置できると仮定し、そのように配置した一群の観測者を**慣性観測者**と言うことにする。

- 点 P_1(座標 (x_1,y_1,z_1)) と点 P_2(座標 (x_2,y_2,z_2)) の間の距離は時間に依らない。
- 全ての点には同じ性質の時計が付随していて、この時計の性質は時間に依存しない。また、これらの時計は時計合わせが可能である。
- $t=$ 一定のどの時間においても、空間の幾何学は Euclid 幾何学である。

時計合わせについては以下を参照するとよい。特殊相対論では慣性観測者だけを扱うので、以下では観測者とは慣性観測者を意味する。また、慣性観測者は慣性基準系、基準系、座標系、あるいは単に系とも呼ばれる。

さて、このように配置した慣性観測者を用いて**事象の観測**をする。事象の観測とは、事象が起こった場所の座標値 (x,y,z) と、その座標値にある時計が示す時刻 t を、その事象に対応させることである。注意すべきは、**時刻 t は、その事象を別の空間点において視認した時刻ではない**ということである。事象が起こった時刻とは、あくまで**その事象が起きた空間点にいる慣性観測者の時計で測った時刻** t である。

慣性観測者と時計合わせ　慣性観測者については、例えば以下のような様子を想像するといいかもしれない。無重力空間[2] に無数の宇宙飛行士をばら撒く。これらの宇宙飛行士は自らを加速する機構は持っておらず、宇宙空間を漂うのみである。それぞれの宇宙飛行士には同じ性質のセシウム原子時計が事前に配布されており、その時計は時間が経っても劣化しない。宇宙飛行士のばら撒き方は、事前に宇宙空間を無限に固い棒で格子状に満たしておき、その格子点それぞれにそっと配置する。宇宙飛行士は格子点に力で固定するのではなく、あくまで格子点のすぐ隣に、格子点に対する相対速度ゼロで配置する。もちろん、時空間の性質によっては時間が経つと宇宙飛行士が格子点に対し動き始めてしまい、宇宙飛行士の間の距離が変化してしまうことも考えられる。ここでは、そうならないような時空間が用意できると仮定している。また、宇宙飛行士を持ち場に配置する際に、事前に用意した時計が影響を受けてしまう可能性も考えられる。この影響は、基準となる GPS 衛星等を用いた時計合わせによって取り除く。

時計合わせは、例えば GPS 衛星を置いた格子点を $\mathscr{O}$ とし、調整したい時計を持つ宇宙飛行士のいる格子点を $\mathscr{A}$ とすると、$\mathscr{O}$ の時刻 $t=0$ で $\mathscr{O}$ から $\mathscr{A}$ に信号を送り、同様の信号を $\mathscr{A}$ から $\mathscr{O}$ に送り返す (図 1)。$\mathscr{O}$ が信号を受け取った時刻が $\mathscr{O}$ の時計で $t=t_*$ であったとすると、信号の伝播に往復で性質の差はないとして、$\mathscr{A}$ が信号を受け取ったのは $\mathscr{O}$ の時計基準で $t=t_*/2$ であると推測できる。そこで、$\mathscr{O}$ から $\mathscr{A}$ に対し「先程あなたが信号を受け取った時刻は私の時計で $t=t_*/2$ である。よって、手持ちの時計の原点を、先程の信号を受け取った時刻が $t=t_*/2$ であるよう調整せよ。」と改めて伝える。これを全ての格子点にいる宇宙飛行士に対し行うことで、全ての時計を $\mathscr{O}$ と合わせることができる。

Newton 力学における特殊相対性原理　さて、慣性観測者という言葉を定義したので、先に登場した特殊相対性原理についてコメントする。特殊相対性原理は単に相対性原理と呼ばれることもある。実は、相対性原理の概念自体は Galilei にまで遡り、Newton 力学にも組み込まれている。以下ではこれを見ることにする。Newton 力学の範囲で、慣性観測者 $\mathscr{O}$ の観測する物体の速度 $\boldsymbol{v}(t)$ は、$\mathscr{O}$ に対して一定の相対速度 $\boldsymbol{V}$ を持った別の慣性観測者 $\overline{\mathscr{O}}$ が観測すると $\overline{\boldsymbol{v}}(t)=\boldsymbol{v}(t)-\boldsymbol{V}$ となる。つまり、系の変更に伴い、位置は

$$\boldsymbol{x}(t)\to\overline{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{V}t, \tag{1.1}$$

[2] あらゆる天体はもちろん、宇宙膨張も全て仮想的に取り除いた空間とする。

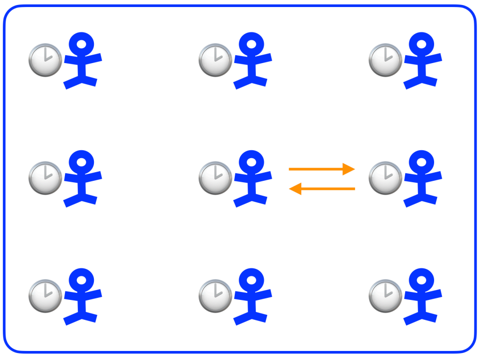


図 1: 慣性観測者の時計合わせの方法。中央の格子点 $\mathscr{O}$ から他の格子点 $\mathscr{A}$ へ時刻 $t=0$ で信号を送り、$\mathscr{A}$ は $\mathscr{O}$ へ信号を送り返す。$\mathscr{O}$ が送り返された信号を受け取った時刻が $t=t_*$ であったとして、$\mathscr{O}$ は $\mathscr{A}$ に、信号を受け取った時刻が $t=t_*/2$ となるよう調整するよう伝える。これを全ての格子点に対し行うことで時計合わせができる。

速度は

$$\boldsymbol{v}(t) \to \overline{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{V}, \tag{1.2}$$

の変換を受ける。時間 t は両者の系に共通であるため不変である。これらの変換を Galilei 変換と言う。Newton の第一法則「力を受けていない物体は速度一定の運動をする」は、Galilei 変換に対し不変である。なぜなら、$\boldsymbol{V}$ は定数ベクトルであるため、$\boldsymbol{v}(t)$ が時間に依存しないなら $\overline{\boldsymbol{v}}(t)$ も同様であるからである。また、第二法則

$$m\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{F}(t), \tag{1.3}$$

も、m および $\boldsymbol{F}(t)$ が観測者に依らないとすると、$\frac{d}{dt}\overline{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t)$ が成り立つため Galilei 変換の下で不変となる。

1.3 単位系

物理においては、普遍的な物理定数を基準として単位系を定義することがあり、これを自然単位系と言う。相対論においては単位系として $c=1$ が用いられる。つまり、時間の $1\,m$ とは光が $1\,m$ 進むのにかかる時間であり、距離の $1\,s$ とは光が $1\,s$ に進む距離である

$$3\times10^8\,\mathrm{m/s} = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad 1\,\mathrm{s} = 3\times10^8\,\mathrm{m} \quad\Longleftrightarrow\quad 1\,\mathrm{m} = \frac{1}{3\times10^8}\,\mathrm{s}. \tag{1.4}$$

1.4 時空図

時空図とは、図 2 のような、横方向を空間、縦方向を時間に取った図である。この図の中に事象や世界線を書き込むことで、計算の補助に使うことができる。

- 事象：時空間の一点。
- 世界線：粒子の軌道を $x=x(t)$ で与えたときに描かれる線。

粒子の速度と世界線の傾きは、

$$(\text{傾き}) = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{v}, \tag{1.5}$$

の関係にある。時空図においては以下のルールを用いる。

- 事象は花文字の大文字 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{P}$ などで表す。花文字 $\mathscr{O}$ で書いたときは観測者である。

- 座標は (t, x, y, z) の順で書く。全ての座標は m 単位で測るものとする。

- 座標 (t, x, y, z) の別の書き方として (x^0, x^1, x^2, x^3) を用いる。上付き添字は冪乗ではなく単なるラベルである。添字 0 が時間座標、添字 1, 2, 3 が空間座標である。

- ギリシャ文字 α, β, μ, ν 等は $(0, 1, 2, 3)$ の範囲の値を取るものとし、従って x^α と書いたときは座標 x^0, x^1, x^2, x^3 のいずれかである。波括弧で $\{x^\alpha\}$ と書いたときは 4 つの座標全てを表す。

- ローマ字 a, b, i, j, k, l 等は $(1, 2, 3)$ の範囲の値を取るものとし、従って x^i と書いたときは空間座標 x^1, x^2, x^3 のいずれかである。

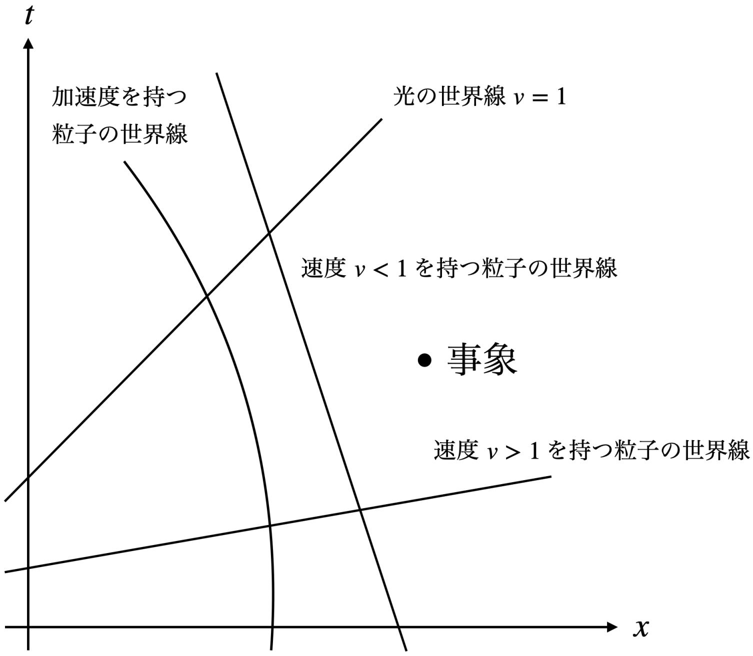


図 2: 時空図。単位系 $c = 1$ を採用しているため、光の世界線は常に傾き 45 度の直線となる。

1.5 別の観測者による座標系

ある観測者を別の観測者が見るとどのように見えるだろうか。簡単のため一旦 y 座標および z 座標は忘れることとする。観測者 $\mathscr{O}$ の持つ座標を (t, x)、観測者 $\overline{\mathscr{O}}$ の持つ座標を $(\bar{t}, \bar{x})$ とし、$\overline{\mathscr{O}}$ は $\mathscr{O}$ に対し x 方向に速度 v で動いているとする。$\mathscr{O}$ の時空図において、$\overline{\mathscr{O}}$ の $\bar{t}$ 軸と $\bar{x}$ 軸はどこに来るだろうか。

- $\bar{t}$ 軸：$\bar{t}$ 軸とは、$\bar{x} = 0$ を持った事象の集合である。これはつまり、$\overline{\mathscr{O}}$ の空間座標の原点の軌跡である。$\overline{\mathscr{O}}$ は $\mathscr{O}$ から見て速度 v で動いているので、図 4 左の $\bar{t}$ 軸のような軌跡になる。

- $\bar{x}$ 軸：$\bar{x}$ 軸とは、$\bar{t} = 0$ を持った事象の集合である。$\bar{t} = 0$ を持った事象とは、観測者 $\overline{\mathscr{O}}$ が時刻 0 を記録するような事象である。この軸の位置を決定するには、以下のように少々議論が必要になる。

繰り返しであるが、「観測者 $\overline{\mathscr{O}}$ が時刻 0 を記録する」とは、「原点 $\bar{x} = 0$ にいる観測者 $\overline{\mathscr{O}}$ が時刻 0 を記録する」ということではなく、「観測者 $\overline{\mathscr{O}}$ と時計合わせをした一群の観測者のうち、事象が起きた時にその地点にいた観測者が時刻 0 を記録する」という意味である。

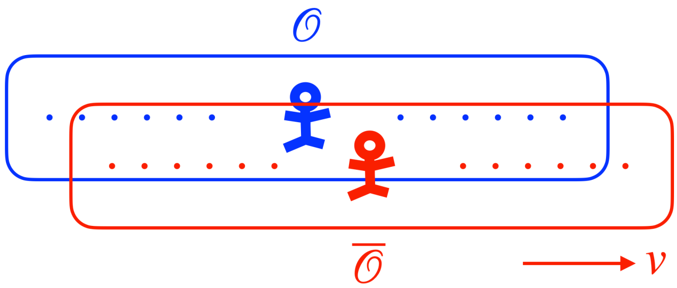


図 3: 系 $\mathscr{O}$ とそれに対し相対速度 $\boldsymbol{v}$ を持つ系 $\overline{\mathscr{O}}$。簡単のため空間方向は x のみとしてある。“…” の部分には無数の観測者が配置してある。$\mathscr{O}$ の観測者同士は上の方法で時計合わせをしてあり、$\overline{\mathscr{O}}$ の観測者同士も同様に時計合わせをしてある。

さて、$\bar{x}$ 軸が $\mathscr{O}$ の時空図でどう見えるか考えよう。そのためにまず、$\overline{\mathscr{O}}$ の時空図 (図 4 右) を考え、$\bar{t} = -a$ で $\bar{x} = 0$ から光が放出されたとする。この事象を $\mathscr{E}$ とする。この光は $(\bar{t}, \bar{x}) = (a, 0)$ に到達する。この事象を $\mathscr{P}$ と呼ぶ。その光が反射されると $\bar{t} = a$ で $\bar{x} = 0$ に戻ってくる。この事象を $\mathscr{R}$ と呼ぶ。見方を変えると、様々な $a (\geq 0)$ に対し、時刻 $\bar{t} = -a$ で $\bar{x} = 0$ から放出された光がちょうど $\bar{t} = a$ に $\bar{x} = 0$ に戻ってくるような反射点 $\bar{x}$ の集合が、$\overline{\mathscr{O}}$ での $\bar{x}$ 軸、すなわち $\bar{t} = 0$ である事象の集合を構成していることがわかる。これが $\mathscr{O}$ の時空図でどう見えるか考えればよい (図 4 左) 。具体的には以下の手続きにより $\bar{x}$ 軸を描くことができる。

- 事象 $\mathscr{E}$ として $(\bar{t}, \bar{x}) = (-a, 0)$ を取る。この点が $\mathscr{O}$ の時空図で $\bar{t}$ 軸上のどの位置に来るかはわからないが、最終的に a の値は様々に変えるので、単に $\bar{t}$ 軸上の $\bar{t} \leq 0$ に任意の点を取ったと思えばよい。
- 事象 $\mathscr{R}$ として、$\bar{t}$ 軸上の $\bar{t} \geq 0$ に、先程の点と対称な位置に点を取る。
- 光速度不変の原理より、事象 $\mathscr{E}$ および事象 $\mathscr{R}$ から光の世界線を 45 度の線として描く。これらの交点が $\bar{x}$ 軸上の事象 $\mathscr{P}$ である。
- 事象 $\mathscr{E}$ の位置を様々に変えることにより、$\bar{x}$ を構成する。

こうして $\mathscr{O}$ の時空図上に描かれた $\bar{x}$ 軸は、x 軸と一致していないことがわかる。すなわち、**$\overline{\mathscr{O}}$ に対する同時な事象 ($= \bar{x}$ 軸) は、$\mathscr{O}$ に対する同時な事象 ($= x$ 軸) と一致しない**のである。これにより、**絶対的な同時の概念は崩壊する**。

実は、この時空図において t 軸と $\bar{t}$ 軸のなす角度 ($= \tan^{-1} |\boldsymbol{v}|$) は、$x$ 軸と $\bar{x}$ 軸のなす角度と一致する。また、$\overline{\mathscr{O}}$ の時空図に t 軸と x 軸を描くと、t 軸と $\bar{t}$ 軸のなす角度および x 軸と $\bar{x}$ 軸のなす角度は先の場合と同じ $\tan^{-1} |\boldsymbol{v}|$ であり、向きが逆であることもわかる。これは図 6 のように幾何学的に示すことができる。$\mathscr{O}$ から右上に 45 度の直線を引くと、これは $\mathscr{E}\mathscr{P}$ と平行である。この直線が $\mathscr{P}\mathscr{R}$ と交わる点を $\mathscr{H}$ とすると、$\mathscr{P}\mathscr{R}$ は左上に 45 度の直線であるから、$\mathscr{O}\mathscr{H}$ と $\mathscr{P}\mathscr{R}$ は直交する。また対称性より $\mathscr{O}\mathscr{E} = \mathscr{O}\mathscr{R}$ なので $\mathscr{H}\mathscr{P} = \mathscr{H}\mathscr{R}$ である。辺 $\mathscr{O}\mathscr{H}$ を共通辺とする二辺狭角相当より三角形 $\mathscr{O}\mathscr{H}\mathscr{P}$ と三角形 $\mathscr{O}\mathscr{H}\mathscr{R}$ は合同であり、よって (t 軸と$\bar{t}$軸のなす角) $= 45° - ($角 $\mathscr{H}\mathscr{O}\mathscr{R})$ および (x 軸と$\bar{x}$軸のなす角) $= 45° - ($角 $\mathscr{H}\mathscr{O}\mathscr{P})$ は等しい。

1.6 間隔の不変性

$\mathscr{O}$ の時空図における $\overline{\mathscr{O}}$ の座標軸の位置がわかったので、次にそれに沿った長さスケールを見つけることにする。

間隔の不変性　一つの光の世界線上の 2 つの事象を考え、その事象の $\mathscr{O}$ から見た座標値の差を $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ とする。$c = 1$ の単位系を用いていることを思い出すと、光の速さは 1 なので、

$$-(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = 0, \tag{1.6}$$

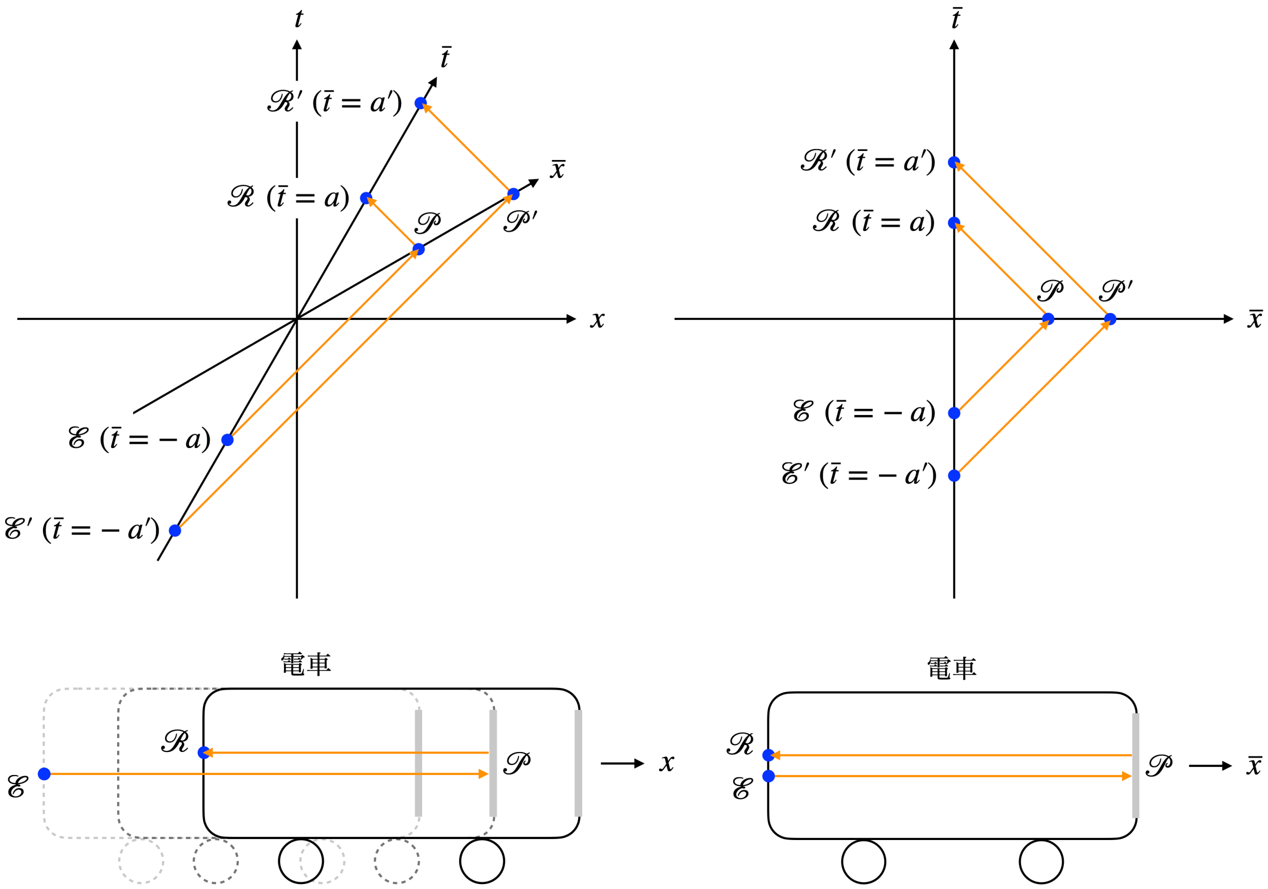


図 4: (左上) $\mathscr{O}$ の時空図における、$\overline{\mathscr{O}}$ の $\bar{t}$ 軸および $\bar{x}$ 軸の位置の決定方法。(右上) $\overline{\mathscr{O}}$ の時空図で見た左図の過程。(左下) 左上図 $\mathscr{E}\to\mathscr{P}\to\mathscr{R}$ の過程を $\mathscr{O}$ から見る場合の例。電車後部から光を発射し、前面にある鏡で反射したのち、後部で観測する。電車が右に進んでいることおよび光速度が一定であることを考慮すると、$\mathscr{E}\to\mathscr{P}$ より $\mathscr{P}\to\mathscr{R}$ の方がかかる時間は短くなる。(右下) 右上図 $\mathscr{E}\to\mathscr{P}\to\mathscr{R}$ の過程を $\overline{\mathscr{O}}$ から見る場合の例。電車後部から光を発射し、前面にある鏡で反射したのち、後部で観測する。電車は静止しているため、往路と復路でかかる時間は同じである。

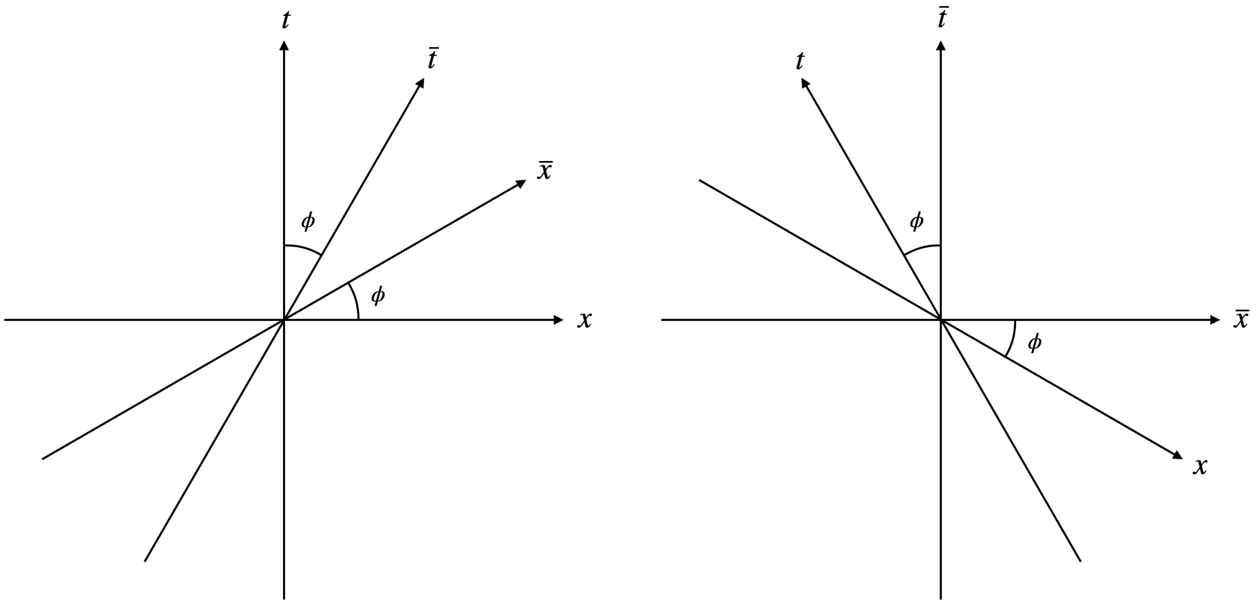


図 5: $\mathscr{O}$(左) および $\overline{\mathscr{O}}$(右) から見た時空図。

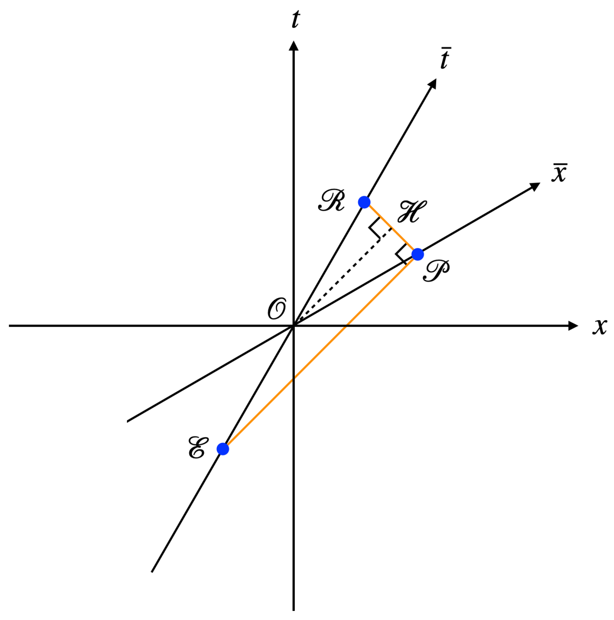


図 6: 図 5 において、t 軸と $\bar{t}$ 軸のなす角度と x 軸と $\bar{x}$ 軸のなす角度が等しいことの幾何学的証明。

が成り立っている。この 2 つの事象の、$\overline{\mathscr{O}}$ から見た座標値の差を $(\Delta\bar{t}, \Delta\bar{x}, \Delta\bar{y}, \Delta\bar{z})$ とすると、光速度不変性の原理から

$$-(\Delta\bar{t})^2 + (\Delta\bar{x})^2 + (\Delta\bar{y})^2 + (\Delta\bar{z})^2 = 0, \tag{1.7}$$

も成り立っている。

ここまでは一つの光の世界線上の 2 事象を考えていた。一般に、必ずしも一つの光の世界線上にない 2 つの事象を考え、それらの $\mathscr{O}$ から見た座標値の差を $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ とし、それらの**間隔** (あるいは**固有距離**や**距離**とも呼ばれる) を

間隔

$$\Delta s^2 := -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \tag{1.8}$$

と定義する。同様に、$\overline{\mathscr{O}}$ から見た座標値の差を $(\Delta\bar{t}, \Delta\bar{x}, \Delta\bar{y}, \Delta\bar{z})$ とし、それらの間隔を

$$\Delta\bar{s}^2 := -(\Delta\bar{t})^2 + (\Delta\bar{x})^2 + (\Delta\bar{y})^2 + (\Delta\bar{z})^2, \tag{1.9}$$

と定義する。先程の光の世界線上の 2 事象の考察より、$\Delta s^2 = 0$ ならば $\Delta\bar{s}^2 = 0$ であり、逆に $\Delta\bar{s}^2 = 0$ ならば $\Delta s^2 = 0$ である。しかし実は、光の世界線上に限らない任意の 2 事象に対しても

間隔の不変性

$$\Delta\bar{s}^2 = \Delta s^2, \tag{1.10}$$

が成り立つ。以下ではこれを妥当な仮定の下に示す。その際、上で述べた $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) = (\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3)$ および $(\Delta\bar{t}, \Delta\bar{x}, \Delta\bar{y}, \Delta\bar{z}) = (\Delta\bar{x}^0, \Delta\bar{x}^1, \Delta\bar{x}^2, \Delta\bar{x}^3)$ の記法を用いることにする。

- まず、座標 $(\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3)$ および $(\Delta\bar{x}^0, \Delta\bar{x}^1, \Delta\bar{x}^2, \Delta\bar{x}^3)$ の間の関係式を線形とし、その関係式は一般に 2 つの

系の相対速度 $\boldsymbol{v}$ の関数であるとする。つまり、

$$\Delta\bar{x}^0 = \Lambda^0{}_0\Delta x^0 + \Lambda^0{}_1\Delta x^1 + \Lambda^0{}_2\Delta x^2 + \Lambda^0{}_3\Delta x^3, \tag{1.11}$$

$$\Delta\bar{x}^1 = \Lambda^1{}_0\Delta x^0 + \Lambda^1{}_1\Delta x^1 + \Lambda^1{}_2\Delta x^2 + \Lambda^1{}_3\Delta x^3, \tag{1.12}$$

$$\Delta\bar{x}^2 = \Lambda^2{}_0\Delta x^0 + \Lambda^2{}_1\Delta x^1 + \Lambda^2{}_2\Delta x^2 + \Lambda^2{}_3\Delta x^3, \tag{1.13}$$

$$\Delta\bar{x}^3 = \Lambda^3{}_0\Delta x^0 + \Lambda^3{}_1\Delta x^1 + \Lambda^3{}_2\Delta x^2 + \Lambda^3{}_3\Delta x^3, \tag{1.14}$$

であり、$\left\{\Lambda^\alpha{}_\beta \middle| \alpha,\beta = 0,\cdots,3\right\}$ は $\boldsymbol{v}$ の関数である。また簡単のため 2 つの座標系の原点は一致しているとする。上式を用いて $\Delta\bar{s}^2$ は以下のように書ける

$$\begin{aligned}
\Delta\bar{s}^2 &:= -(\Delta\bar{x}^0)^2 + (\Delta\bar{x}^1)^2 + (\Delta\bar{x}^2)^2 + (\Delta\bar{x}^3)^2 \\
&= \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} M_{\alpha\beta}(\Delta x^\alpha)(\Delta x^\beta) \\
&= M_{00}(\Delta x^0)(\Delta x^0) + M_{11}(\Delta x^1)(\Delta x^1) + M_{22}(\Delta x^2)(\Delta x^2) + M_{33}(\Delta x^3)(\Delta x^3) \\
&\quad + (M_{01}+M_{10})(\Delta x^0)(\Delta x^1) + (M_{02}+M_{20})(\Delta x^0)(\Delta x^2) + (M_{03}+M_{30})(\Delta x^0)(\Delta x^3) \\
&\quad + (M_{12}+M_{21})(\Delta x^1)(\Delta x^2) + (M_{13}+M_{31})(\Delta x^1)(\Delta x^3) + (M_{23}+M_{32})(\Delta x^2)(\Delta x^3).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

ここで $\left\{M_{\alpha\beta} \middle| \alpha,\beta = 0,\cdots,3\right\}$ は $\left\{\Lambda^\alpha{}_\beta \middle| \alpha,\beta = 0,\cdots,3\right\}$ を用いて表すことのできる $\boldsymbol{v}$ の何らかの関数である。上記の形から、$\alpha \neq \beta$ に対しては $M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}$ の形しか現れないので、任意の $\alpha \neq \beta$ に対して $M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$ として一般性を失わない。すると

$$\begin{aligned}
\Delta\bar{s}^2 &= M_{00}(\Delta x^0)(\Delta x^0) + M_{11}(\Delta x^1)(\Delta x^1) + M_{22}(\Delta x^2)(\Delta x^2) + M_{33}(\Delta x^3)(\Delta x^3) \\
&\quad + 2M_{01}(\Delta x^0)(\Delta x^1) + 2M_{02}(\Delta x^0)(\Delta x^2) + 2M_{03}(\Delta x^0)(\Delta x^3) \\
&\quad + 2M_{12}(\Delta x^1)(\Delta x^2) + 2M_{13}(\Delta x^1)(\Delta x^3) + 2M_{23}(\Delta x^2)(\Delta x^3),
\end{aligned} \tag{1.16}$$

となる。

- 特別な場合として 2 つの事象が一つの光の世界線上にある場合を考えると、$\Delta s^2 = 0$ より

$$\Delta x^0 = \sqrt{(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2}, \tag{1.17}$$

である。任意の $\left\{\Delta x^i \middle| i = 1,2,3\right\}$ に対し $\Delta s^2 = 0$ のときは $\Delta\bar{s}^2 = 0$ であるから、上式を $\Delta\bar{s}^2$ の表式に代入し

$$\begin{aligned}
\Delta\bar{s}^2 &= M_{00}\left[(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2\right] + M_{11}(\Delta x^1)(\Delta x^1) + M_{22}(\Delta x^2)(\Delta x^2) + M_{33}(\Delta x^3)(\Delta x^3) \\
&\quad + 2\left[M_{01}(\Delta x^1) + M_{02}(\Delta x^2) + M_{03}(\Delta x^3)\right]\sqrt{(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2} \\
&\quad + 2M_{12}(\Delta x^1)(\Delta x^2) + 2M_{13}(\Delta x^1)(\Delta x^3) + 2M_{23}(\Delta x^2)(\Delta x^3) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{1.18}$$

を得る。この要請を満たすには、δ_{ij} を Kronecker のデルタ

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j), \end{cases} \tag{1.19}$$

として、

$$M_{0i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \qquad M_{ij} = -M_{00}\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{1.20}$$

となる必要があることがわかる。実際、式 (1.18) においてまず $\Delta x^1 \neq 0, \Delta x^2 = \Delta x^3 = 0$ の状況を考えると

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{00}(\Delta x^1)^2 + M_{11}(\Delta x^1)^2 + 2M_{01}(\Delta x^1)|\Delta x^1|, \tag{1.21}$$

であるが、この式および $\Delta x^1 \to -\Delta x^1$ とした式

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{00}(\Delta x^1)^2 + M_{11}(\Delta x^1)^2 - 2M_{01}(\Delta x^1)|\Delta x^1|, \tag{1.22}$$

から $M_{11} = -M_{00}$ と $M_{01} = 0$ が導かれ、同様にして $M_{22} = M_{33} = -M_{00}$ と $M_{02} = M_{03} = 0$ が導かれる。次に式 (1.18) において $\Delta x^1 = \Delta x^2 \neq 0, \Delta x^3 = 0$ の状況を考えると

$$\Delta\bar{s}^2 = 2M_{12}(\Delta x^1)^2 = 0, \tag{1.23}$$

となるので、$M_{12} = 0$ が導かれ、同様にして $M_{13} = M_{23} = 0$ が導かれる。結果、

$$\Delta\bar{s}^2 = M_{00}\left[(\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2\right] = -M_{00}\Delta s^2, \tag{1.24}$$

を得る。ここで、M_{00} は一般に相対速度 $\boldsymbol{v}$ に依存することを思い出すと、

$$\phi(\boldsymbol{v}) := -M_{00}, \tag{1.25}$$

で定義される関数 $\phi(\boldsymbol{v})$ を用いて

$$\Delta\bar{s}^2 = \phi(\boldsymbol{v})\Delta s^2, \tag{1.26}$$

となることがわかる。

- 最後に $\phi(\boldsymbol{v}) = 1$ であることを示す。空間に特別な方向はないので、$\phi(\boldsymbol{v})$ は $|\boldsymbol{v}|$ のみの関数であり、

$$\Delta\bar{s}^2 = \phi(|\boldsymbol{v}|)\Delta s^2, \tag{1.27}$$

である[3]。系 $\bar{\mathscr{O}}$ に対し速度 $-\boldsymbol{v}$ で運動する系 $\bar{\bar{\mathscr{O}}}$ を考えると、$\bar{\bar{\mathscr{O}}}$ は $\mathscr{O}$ と同一であるが、今のところは区別して呼ぶ

[3] より丁寧に示すには、2 事象として Δs^2 および $\Delta\bar{s}^2$ がどちらも空間的距離に一致するようなものを取る。具体的には、$\bar{\mathscr{O}}$ の $\mathscr{O}$ に対する速度 $\boldsymbol{v}$ が x 方向を向いているとして、それと直交する方向に棒を取る。この棒の端点の世界線が図 7 に示してある。$\mathscr{O}$ の時刻 $t = 0$ での棒の端点を事象として選び、$\mathscr{A}$ および $\mathscr{B}$ と呼ぶ。この 2 事象間の距離は $\mathscr{O}$ にとって空間的距離に一致することがわかる。なぜなら

$$\Delta s^2 := -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 \overset{\Delta x^0 = 0}{=} (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2, \tag{1.28}$$

であるからである。これら $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ は $\bar{\mathscr{O}}$ から見ても同時である。なぜなら、図のように $\mathscr{P}$ から光が発射されて $\mathscr{A}$ で反射して $\mathscr{Q}$ に戻るとすると、棒の対称性より、$\mathscr{P}$ から発射されて $\mathscr{B}$ で反射した光は同じ $\mathscr{Q}$ に到達するからである。従って観測者 $\bar{\mathscr{O}}$ にとっても事象 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ は同時であり、これら 2 事象間の距離は空間的距離に一致する

$$\Delta\bar{s}^2 := -(\Delta\bar{x}^0)^2 + (\Delta\bar{x}^1)^2 + (\Delta\bar{x}^2)^2 + (\Delta\bar{x}^3)^2 \overset{\Delta\bar{x}^0 = 0}{=} (\Delta\bar{x}^1)^2 + (\Delta\bar{x}^2)^2 + (\Delta\bar{x}^3)^2. \tag{1.29}$$

さて、今の 2 事象の選び方においては

$$(\bar{\mathscr{O}}\text{での棒の長さ})^2 = \phi(\boldsymbol{v})(\mathscr{O}\text{ での棒の長さ})^2, \tag{1.30}$$

となったわけだが、棒は速度 $\boldsymbol{v}$ の向きと直交しているので、棒の長さの変換則に現れる $\phi(\boldsymbol{v})$ に $\boldsymbol{v}$ の方向依存性はないはずである。従って $\phi(\boldsymbol{v}) = \phi(|\boldsymbol{v}|) = \phi(v)$ である。

ことにして、上記の考察から

$$\Delta\bar{\bar{s}}^2 = \phi(v)\Delta\bar{s}^2, \qquad \Delta\bar{s}^2 = \phi(v)\Delta s^2, \tag{1.31}$$

であるから、

$$\Delta\bar{\bar{s}}^2 = \phi(v)^2\Delta s^2, \tag{1.32}$$

となる。$\bar{\bar{\mathscr{O}}}$ と $\mathscr{O}$ は同一なので $\Delta\bar{\bar{s}}^2 = \Delta s^2$ であり、

$$\phi(v)^2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(v) = \pm 1, \tag{1.33}$$

が得られる。ところで、2 事象として、それらの間の間隔が $\mathscr{O}$ および $\bar{\mathscr{O}}$ のどちらにとっても空間的距離の二乗に等しくなるようなものを取ることができる (図 7)。この場合、どちらの観測者にとっても空間的距離の二乗は正であるから、

$$\phi(v) = 1, \tag{1.34}$$

が導かれる。

以上より間隔の不変性 $\Delta s^2 = \Delta\bar{s}^2$ が示された。**間隔は系に依らないので、以下ではどの系に対しても** Δs^2 **と呼ぶことにする。**また、以下では**間隔を固有距離あるいは距離と呼ぶことがある。**

次に進む前に、脚注 3 および図 7 から「2 つの系の相対速度に直行する棒の長さはどちらの系で測っても同じである」こと、および「ある系で同時な 2 事象は、それらを結ぶ線に直交する方向に動いている系でも同時である」ことを確認しよう。

絶対過去・絶対未来　上の議論から、距離 $\Delta s^2 := -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ **は 2 事象だけで決まる量であり、観測者に依存しない**ことが示された。この性質から、Δs^2 を事象の関係を分類するのに用いることができる。

- $\Delta s^2 > 0$ のとき、2 事象は**空間的に離れている**もしくは単に**空間的**と言う。
- $\Delta s^2 < 0$ のとき、2 事象は**時間的に離れている**もしくは単に**時間的**と言う。
- $\Delta s^2 = 0$ のとき、2 事象は**ヌル的に離れている**もしくは**光的**と言う。

任意の事象 $\mathscr{A}$ から光的に離れている事象は、$\mathscr{A}$ を頂点とする円錐上に乗る (図 8)。この円錐を $\mathscr{A}$ の光円錐と呼ぶ。以下の事実がわかる。

- 光円錐の中の事象は、至る所で時間的な方向に動いている世界線で到達可能である。
- 光円錐の外の事象は、時間的な方向にのみ動いている世界線では到達不可能である。

後に見るように、任意の物体の世界線は時間的な方向に動くため、光円錐内の事象は $\mathscr{A}$ から物体が到達するあるいは $\mathscr{A}$ に物体を到達させることができるが、光円錐外の事象はそのようなことができない。そのため、

- $\mathscr{A}$ の未来方向 (前方) の光円錐内の事象：$\mathscr{A}$ の絶対未来
- $\mathscr{A}$ の過去方向 (後方) の光円錐内の事象：$\mathscr{A}$ の絶対過去
- $\mathscr{A}$ の外側の事象：$\mathscr{A}$ の絶対的非因果領域

と事象を分類することができる。

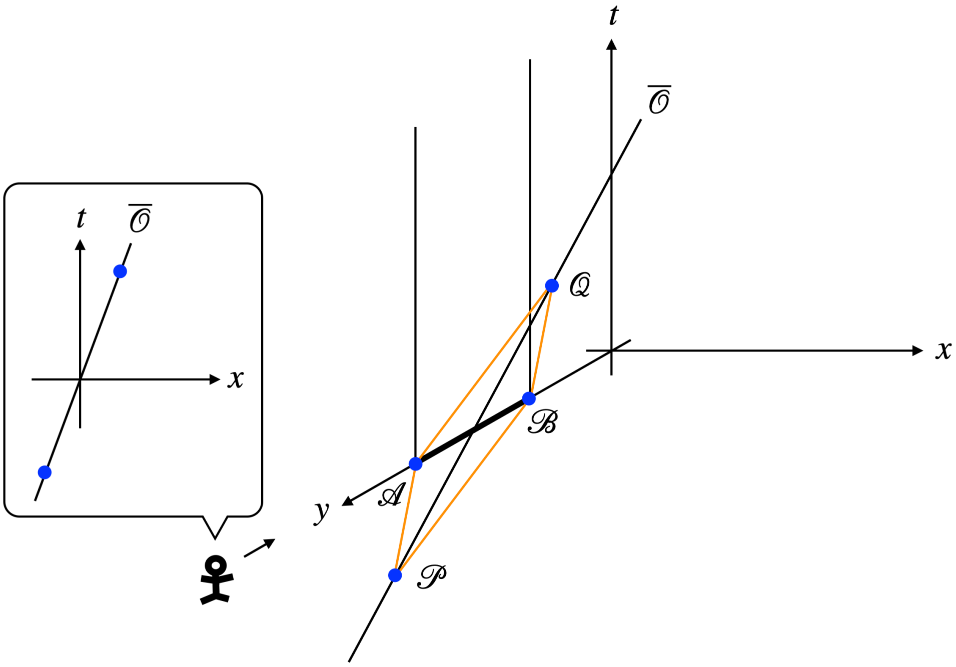


図 7: $\overline{\mathscr{O}}$ の $\mathscr{O}$ に対する速度 $\boldsymbol{v}$ と直交する方向に取られた棒と、その端点の世界線。事象 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ は $\mathscr{O}$ にとって同時であり、かつ $\overline{\mathscr{O}}$ にとっても同時である。

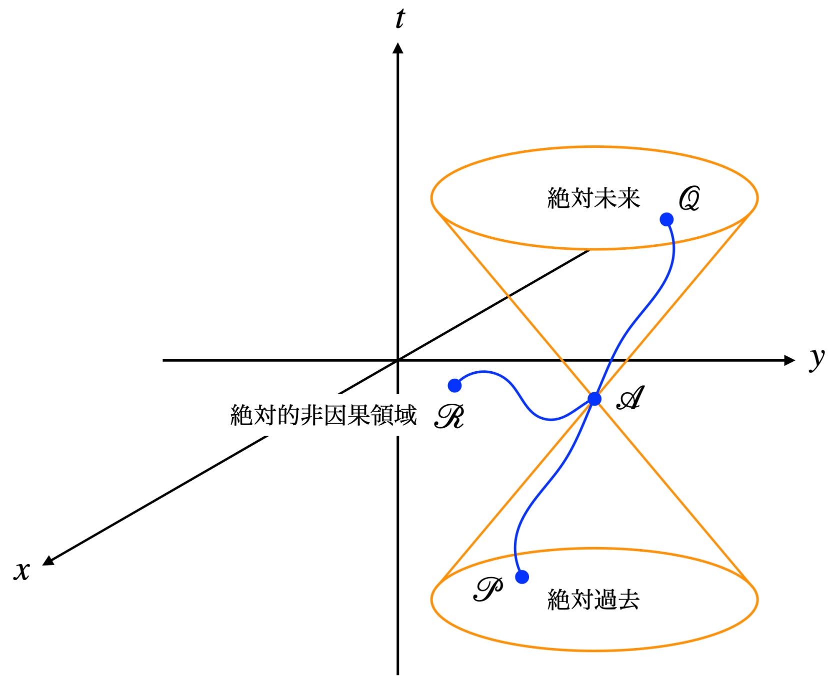


図 8: 事象 $\mathscr{A}$ の光円錐と、$\mathscr{A}$ の絶対過去・絶対未来・絶対的非因果領域。本来空間方向は 3 次元であるが、図示の都合上 x,y 方向のみ表示してある。光円錐内の事象 $\mathscr{P},\mathscr{Q}$ は $\mathscr{A}$ から至るところ時間的な世界線で到達可能であるが、光円錐外の事象 $\mathscr{R}$ にはそのような曲線では到達不可能である。

1.7 不変双曲線

ここまでの議論から、$\mathscr{O}$ の時空図における $\overline{\mathscr{O}}$ の座標軸に目盛りを付けることができる。まず、a を実定数として曲線

$$-t^2 + x^2 = a^2, \tag{1.35}$$

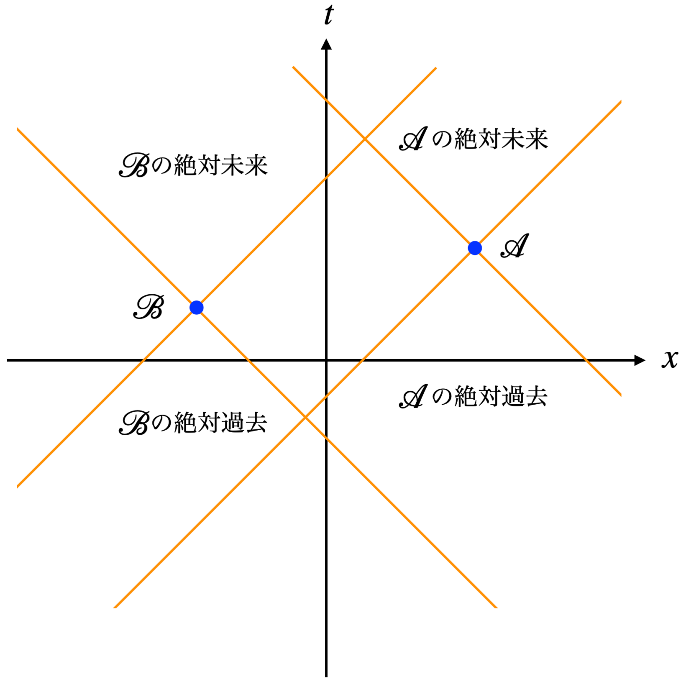


図 9: 事象 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ それぞれにとっての絶対過去・絶対未来・絶対的非因果領域。

を考える。この曲線は $\mathscr{O}$ の時空図で双曲線となる。左辺は $\mathscr{O}$ の原点からの距離であり、従って $\mathscr{O}$ の原点からの距離が a^2 であるような事象は全てこの双曲線上にある (図 10、領域 $|t| < |x|$ の曲線)。上で示したように距離は観測者に依存しないため、そのような事象は全て双曲線

$$-\bar{t}^2 + \bar{x}^2 = a^2, \tag{1.36}$$

上にも乗っている。例えば図 10 の領域 $|t| < |x|$ にある最も内側の青線は、$-t^2 + x^2 = 1$ であると同時に $-\bar{t}^2 + \bar{x}^2 = 1$ でもある。同様に、b を実定数として曲線

$$-t^2 + x^2 = -b^2, \tag{1.37}$$

を考えると、原点からの距離が $-b^2$ であるような事象は全てこの双曲線上にあり (図 10、領域 $|t| > |x|$ の曲線)、そのような事象は全て双曲線

$$-\bar{t}^2 + \bar{x}^2 = -b^2, \tag{1.38}$$

上にも乗っている 。

図 11 に図 10 の原点付近の拡大図を示してある。ここに描かれた事象 $\mathscr{B}, \mathscr{B}', \mathscr{B}'', \cdots$ は事象 $\mathscr{A}$ よりも原点から遠くにあるように見えるが、それは Euclid 距離に基づいた直観であり、誤りである。特殊相対論における距離は固有距離 $\Delta s^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2$ であり、この距離で測ると事象 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{B}', \mathscr{B}'', \cdots$ の原点からの距離は同一である。これら $\mathscr{B}, \mathscr{B}', \mathscr{B}'', \cdots$ のうち、特に $\bar{t}$ 軸上にあるものを $\mathscr{B}$ と呼ぶことにする。

図 12 左に事象 $\mathscr{B}$ における不変双曲線の接線を示してある。この接線が $\bar{x}$ 軸と平行になることが以下のように示せる。まず、事象 $\mathscr{B}$ のある不変双曲線を

$$-t^2 + x^2 = -b^2, \tag{1.39}$$

とし、その $\mathscr{O}$ 系での座標を $(t_{\mathscr{B}}, x_{\mathscr{B}})$ としよう。この不変双曲線上の点 (t,x) における接線の傾きは、両辺を微分して

$$-2tdt + 2xdx = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{x}{t}, \tag{1.40}$$

で求まるから、事象 $\mathscr{B}$ における接線の傾きは

$$\left.\frac{dt}{dx}\right|_{\mathscr{B}} = \frac{x_{\mathscr{B}}}{t_{\mathscr{B}}}, \tag{1.41}$$

となる。一方、以前に示した通り、t 軸と $\bar{t}$ 軸のなす角度は x 軸と $\bar{x}$ 軸のなす角度に等しい。$\mathscr{O}$ の時空図で $\bar{t}$ 軸の傾きは $t_{\mathscr{B}}/x_{\mathscr{B}}$ なので、$\bar{x}$ 軸の傾きは

$$\frac{x_{\mathscr{B}}}{t_{\mathscr{B}}}, \tag{1.42}$$

である。よって、事象 $\mathscr{B}$ における不変双曲線の接線は $\bar{x}$ 軸と平行である。

この事実は、$\overline{\mathscr{O}}$ の時空図で見ると簡単に理解できる。図 12 右に $\overline{\mathscr{O}}$ の時空図での見え方を示してある。事象 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ は共に不変双曲線 $-t^2 + x^2 = -b^2$ 上にあるので、距離の不変性より $\overline{\mathscr{O}}$ の時空図では不変双曲線 $-\bar{t}^2 + \bar{x}^2 = -b^2$ 上にある。そして、$\mathscr{O}$ の時空図で事象 $\mathscr{B}$ において引いた接線 (接線 l と呼ぶ) は、$\overline{\mathscr{O}}$ の時空図で事象 $\mathscr{B}$ において引いた接線 (接線 $\bar{l}$ と呼ぶ) に移る。なぜなら、接線 l が接線 $\bar{l}$ 以外の (事象 $\mathscr{B}$ を通る) 直線に移るとすると、不変双曲線との交点が 2 個になってしまう。すると、その 2 つの事象を $\mathscr{O}$ の時空図に戻って見たときに、接線 l と不変双曲線の交点が 2 個あることになって矛盾するからである。そして、接線 $\bar{l}$ は明らかに $\bar{x}$ 軸に平行である。

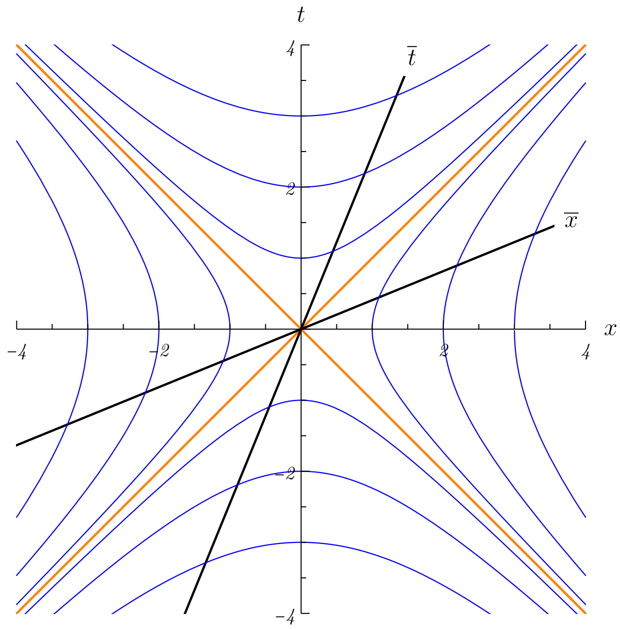


図 10: 不変双曲線 $-t^2 + x^2 = a^2$ および $-t^2 + x^2 = -b^2$。同一曲線上の事象は全て原点からの間隔が同一である。また、距離の不変性より、$\mathscr{O}$ にとって原点からの間隔が a^2 である曲線は、$\overline{\mathscr{O}}$ にとっても原点からの間隔が a^2 である。同様に、$\mathscr{O}$ にとって原点からの間隔が $-b^2$ である曲線は、$\overline{\mathscr{O}}$ にとっても原点からの間隔が $-b^2$ である。

1.8 時間の遅れと Lorentz 収縮

特殊相対論の重要な結果である、時間の遅れと Lorentz 収縮について考察する。これまでと同様、観測者 $\mathscr{O}$ の持つ座標を (t,x)、観測者 $\overline{\mathscr{O}}$ の持つ座標を $(\bar{t}, \bar{x})$ とし、$\overline{\mathscr{O}}$ は $\mathscr{O}$ に対し x 方向に速度 v で動いているとする。

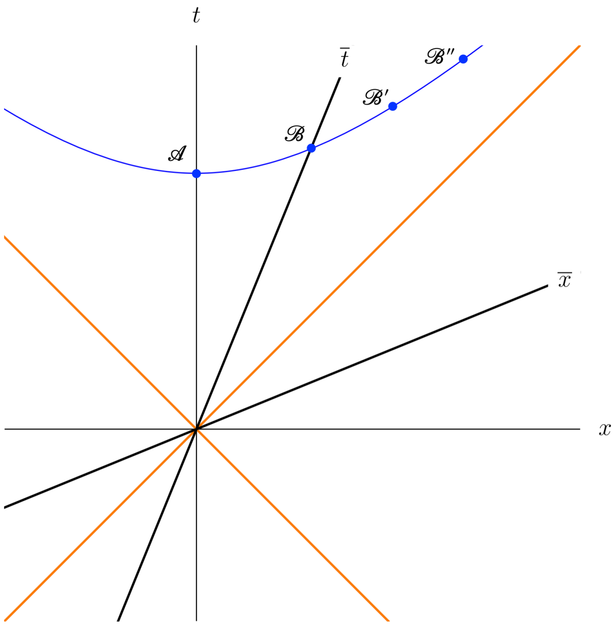


図 11: 図 10 の原点付近の拡大図。固有距離 $\Delta s^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2$ で測ると、事象 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ の原点からの距離は同一である。

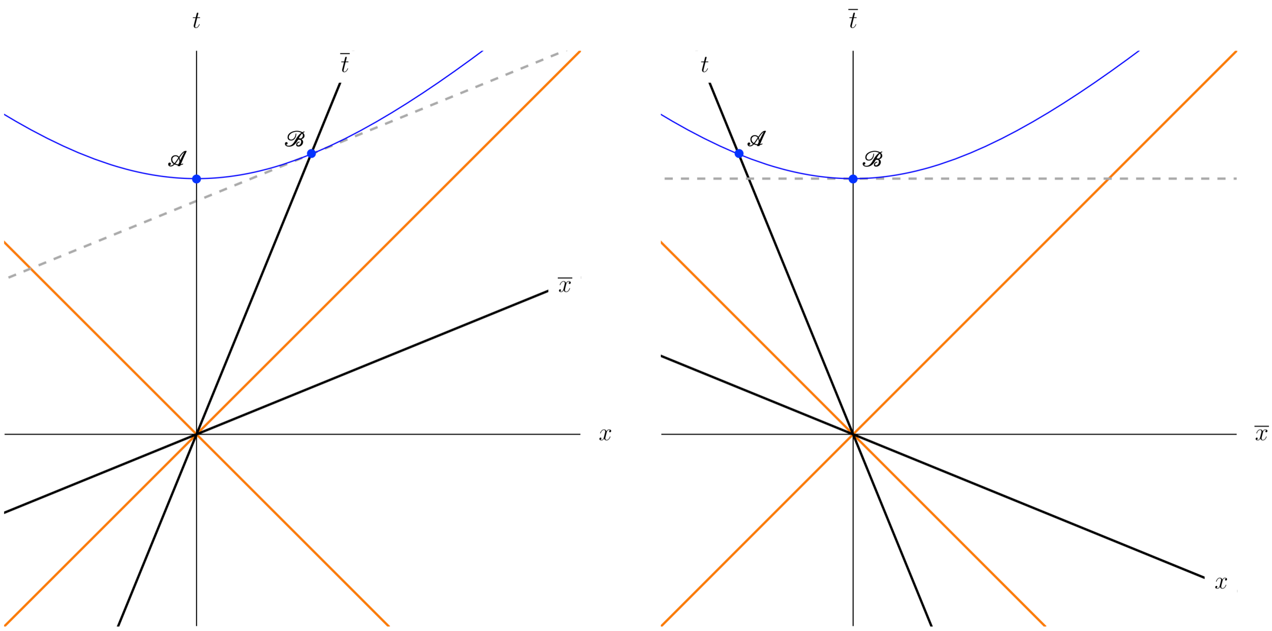


図 12: (左) 図 11 の事象 $\mathscr{B}$ における不変双曲線の接線 (灰色破線)。この接線は $\overline{x}$ 軸に平行になる。(右) 左図を $\overline{\mathscr{O}}$ の時空図で見たもの。左図で引いた接線は、$\overline{\mathscr{O}}$ の時空図での不変双曲線の接線に移る。これは明らかに $\overline{x}$ 軸に平行である。

時間の遅れ　$\bar{t}$ 軸上を運動している時計を考える (図 13)。これが事象 $\mathscr{B}$ において

$$\bar{t}_{\mathscr{B}} = 1, \tag{1.43}$$

を示すとする。$\bar{t}$ 軸上を運動しているということは、$\overline{x}$ の値は

$$\overline{x}_{\mathscr{B}} = 0, \tag{1.44}$$

であることに注意しよう。事象 $\mathscr{B}$ の $\mathscr{O}$ での座標 $(t_{\mathscr{B}}, x_{\mathscr{B}})$ は、距離の不変性より

$$-t_{\mathscr{B}}^2 + x_{\mathscr{B}}^2 = -\bar{t}_{\mathscr{B}}^2 + \bar{x}_{\mathscr{B}}^2 = 1, \tag{1.45}$$

であることと、$\mathscr{O}$ の時空図において $\bar{t}$ 軸が傾き $1/v$ であること

$$\frac{t_{\mathscr{B}}}{x_{\mathscr{B}}} = \frac{1}{v}, \tag{1.46}$$

から

$$t_{\mathscr{B}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad x_{\mathscr{B}} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{1.47}$$

と求まる。特に時刻に注目すると

$$t_{\mathscr{B}} = \frac{\bar{t}_{\mathscr{B}}}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{1.48}$$

となっていることがわかる。実際、図 13 の事象 $\mathscr{B}$ において $t_{\mathscr{B}} = \bar{t}_{\mathscr{B}}/\sqrt{1-v^2}$ となっている。

より一般に $\bar{t}_{\mathscr{B}} = 1$ とは限らない場合を考えよう。原点 $\mathscr{A}$ と事象 $\mathscr{B}$ との座標の差を考えていることを明示するため、$t_{\mathscr{B}} = \Delta t, x_{\mathscr{B}} = \Delta x, \bar{t}_{\mathscr{B}} = \Delta\bar{t}, \bar{x}_{\mathscr{B}} = \Delta\bar{x}$ と書くことにする。また、今まで明示的に書いていなかった $\mathscr{O}$ と $\overline{\mathscr{O}}$ の相対速度に直交する空間方向 y, z も含めて書くことにする。系 $\overline{\mathscr{O}}$ での距離は、$\Delta\bar{x} = \Delta\bar{y} = \Delta\bar{z} = 0$ より

$$\Delta s^2 = -\Delta\bar{t}^2, \tag{1.49}$$

である。ここで一般に、時間的に離れた 2 事象間を一定速度で運動する時計が測定する時間差を、それらの事象の間の固有時間 $\Delta\tau$ と言う

固有時間

時間的に離れた 2 事象について、それらの事象間を一定速度で運動する時計が測定する時間差を
固有時間$\Delta\tau$と言う。 (1.50)

今の場合、原点 $\mathscr{A}$ と事象 $\mathscr{B}$ の間の固有時間 $\Delta\tau$ は $\overline{\mathscr{O}}$ の単一の時計が $\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$ まで測った時間 $\Delta\bar{t}$ である。そして上の議論からわかる通り、2 事象間の距離 Δs^2 はそれら事象間の固有時間の二乗を -1 倍したものになる

固有時間と距離の関係

$$\Delta s^2 = -\Delta\tau^2. \tag{1.51}$$

一方、系 $\mathscr{O}$ での距離は

$$\Delta s^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = -\Delta t^2\left(1 - \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta t^2}\right) = -\Delta t^2\left(1 - v^2\right), \tag{1.52}$$

と書ける。よって**時間の遅れ**

時間の遅れ

$$\Delta t = \frac{\Delta\bar{t}}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{1.53}$$

が起きていることがわかる。この場合、$\mathscr{O}$ の測った時間差 Δt の方が $\overline{\mathscr{O}}$ の測った時間差 $\Delta\bar{t}$ より大きいので、$\mathscr{O}$ の時計が遅れていることになる。

しかし、時間の遅れを解釈する際には注意が必要である。$\overline{\mathscr{O}}$ が $\mathscr{O}$ に対し速度 v で動いているということは、$\mathscr{O}$ は $\overline{\mathscr{O}}$ に対し速度 $-v$ で動いているのであり、時間の遅れは

$$\Delta\bar{t} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-(-v)^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{1.54}$$

となるはずである。式 (1.53) と式 (1.54) は矛盾していないだろうか？これらが矛盾していないことを見るには、どの時計で測った時間差であるかを明示する必要がある。まず、原点 $\mathscr{A}$ と事象 $\mathscr{B}$ に注目して導かれた式 (1.53) において、$\Delta\bar{t}$ **は $\overline{\mathscr{O}}$ の同一の時計で測った時間差**である。実際、$\Delta\bar{t}$ は $\bar{t}$ 軸に沿って動く一つの時計で測られている。一方、Δt **は $\mathscr{O}$ において事前に時計合わせされた 2 つの異なる時計で測った時間差**である。実際、Δt は原点 $\mathscr{A}$ にある時計と事象 $\mathscr{B}$ にある時計の時間差であり、これらは事前に時計合わせされているが同一の時計ではない。よって、式 (1.53) は

$$(\Delta t)_{\mathscr{O}\text{ の時計合わせされた 2 つの時計で測定}} = \frac{(\Delta\bar{t})_{\overline{\mathscr{O}}\text{の 1 つの時計で測定}}}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{1.55}$$

と書かれるべき式である。あるいは、注目する 2 事象を明示して

$$(\Delta t)_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = \frac{(\Delta\bar{t})_{\mathscr{A}\mathscr{B}}}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{1.56}$$

と書いてもよい。これに対し、式 (1.54) を式 (1.53) と同様の論理で導出するには $\mathscr{O}$ と $\overline{\mathscr{O}}$ の役割を入れ替えなければいけないため、原点 $\mathscr{A}$ と事象 $\mathscr{D}$ に注目することになる。この式において、Δt **は $\mathscr{O}$ の同一の時計で測った時間差**であり、t 軸に沿って動く一つの時計で測られている。一方、$\Delta\bar{t}$ **は $\overline{\mathscr{O}}$ において事前に時計合わせされた 2 つの異なる時計で測った時間差**、つまり原点 $\mathscr{A}$ にある時計と事象 $\mathscr{D}$ にある時計の時間差であり、これらは事前に時計合わせされているが同一の時計ではない。よって、式 (1.54) は

$$(\Delta\bar{t})_{\overline{\mathscr{O}}\text{の時計合わせされた 2 つの時計で測定}} = \frac{(\Delta t)_{\mathscr{O}\text{ の 1 つの時計で測定}}}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{1.57}$$

と書かれるべき式である。あるいは、注目する 2 事象を明示して

$$(\Delta\bar{t})_{\mathscr{A}\mathscr{D}} = \frac{(\Delta t)_{\mathscr{A}\mathscr{D}}}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{1.58}$$

と書いてもよい。式 (1.55) と式 (1.57)、あるいは式 (1.56) と式 (1.58) は矛盾していないことがわかる。

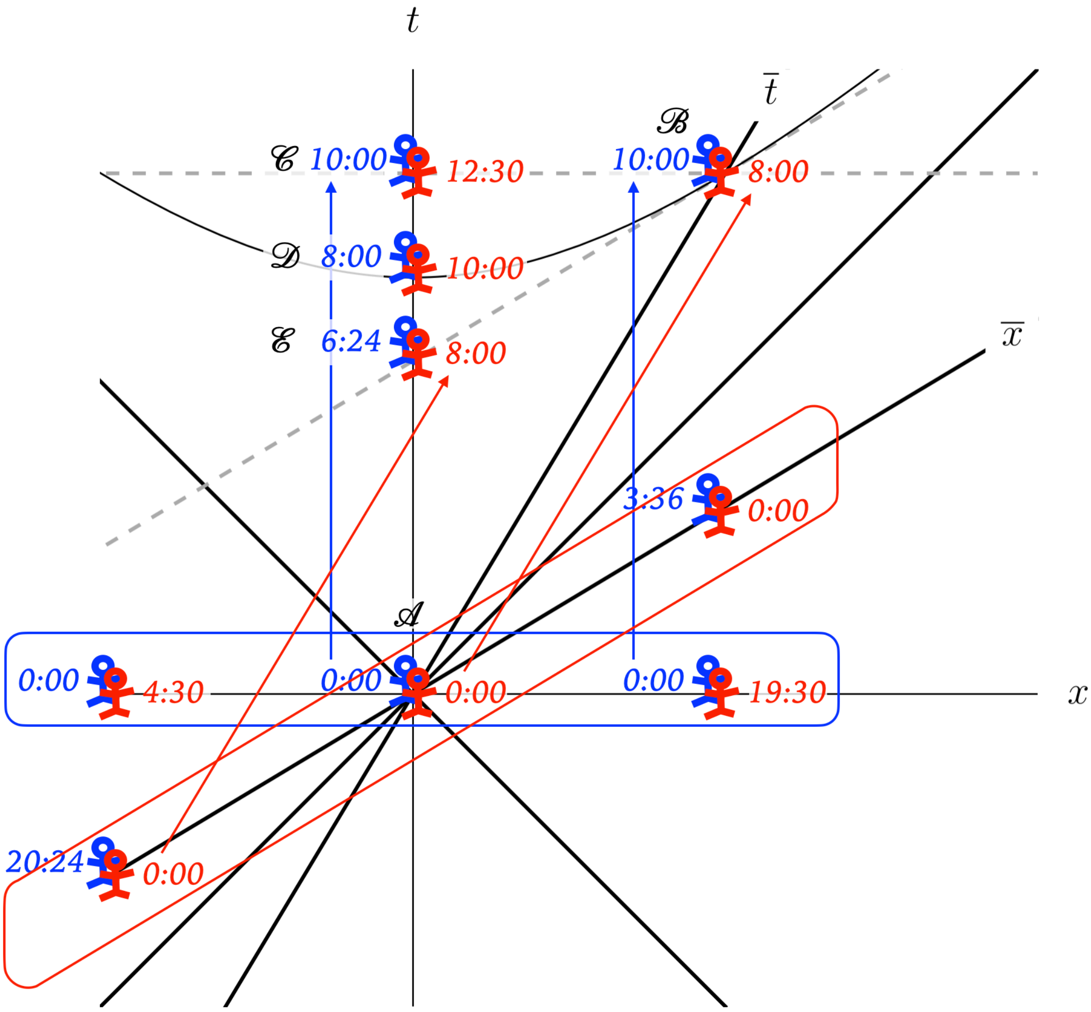


図 13: 時間の遅れ。$v = 0.6$ の例。本文での時刻 $1\,\mathrm{m} = (3 \times 10^8)^{-1}\,\mathrm{s}$ を $8:00 = 8$ 時間に置き換えてある。青枠内の青色の時計は、$\mathscr{O}$ の観測者間で事前に時計合わせされている。同様に、赤枠内の赤色の時計は、$\overline{\mathscr{O}}$ の観測者間で事前に時計合わせされている。

[問 1.1]　([1] Problem 1.12)

(1)　時間の遅れの図に関して、双曲線 $\mathscr{D}\mathscr{B}$ は不変双曲線、すなわち原点からの距離

$$\Delta s^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 = -\Delta\bar{t}^2 + \Delta\bar{x}^2$$

が一定となるような双曲線である。この双曲線と $\bar{t}$ 軸との交点 $\mathscr{B}$ における接線は、$\overline{\mathscr{O}}$ にとっての同時の線である。これを用いて、$\mathscr{O}$ が $\mathscr{A}$ から $\mathscr{E}$ まで動くときに $\mathscr{O}$ の時計が記録する時間間隔 $\Delta t_{\mathscr{A}\mathscr{E}}$ は、$\overline{\mathscr{O}}$ が $\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$ まで動くときに $\overline{\mathscr{O}}$ の時計が記録する時間間隔 $\Delta\bar{t}_{\mathscr{A}\mathscr{B}}$ より短いことを示せ。

(2)　$\mathscr{A}\mathscr{B}$ 間の距離と $\mathscr{A}\mathscr{E}$ 間の距離について、式

$$\Delta s^2_{\mathscr{A}\mathscr{E}} = (1-v^2)\Delta s^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}},$$

を示せ。

(3)　(2) の結果および $\mathscr{B},\mathscr{E}$ が系 $\overline{\mathscr{O}}$ で同時であることから、事象 $\mathscr{A},\mathscr{E}$ に着目する限り、$\overline{\mathscr{O}}$ から見ると $\mathscr{O}$ の時計が割合 $\sqrt{1-v^2}$ で遅れて進むことを示せ。

[解 1.1]

(1)　$\mathscr{D}$ は t 軸上、$\mathscr{B}$ は $\bar{t}$ 軸上にあるので

$$\Delta x_{\mathscr{A}\mathscr{D}} = 0, \qquad \Delta\bar{x}_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = 0,$$

である。距離の不変性より

$$\Delta s^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = -\Delta t^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}} + \Delta x^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = -\Delta\bar{t}^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}} + \Delta\bar{x}^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}},$$

であり、$\mathscr{B},\mathscr{D}$ は同一の不変双曲線上にあるので

$$-\Delta t^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}} + \Delta x^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = -\Delta t^2_{\mathscr{A}\mathscr{D}} + \Delta x^2_{\mathscr{A}\mathscr{D}},$$

である。よって

$$-\Delta\bar{t}^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}} + \Delta\bar{x}^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = -\Delta t^2_{\mathscr{A}\mathscr{D}} + \Delta x^2_{\mathscr{A}\mathscr{D}} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta\bar{t}^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = \Delta t^2_{\mathscr{A}\mathscr{D}} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta\bar{t}_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = \Delta t_{\mathscr{A}\mathscr{D}},$$

である。一方 t 軸上の位置関係より

$$\Delta t_{\mathscr{A}\mathscr{E}} < \Delta t_{\mathscr{A}\mathscr{D}},$$

であるから、

$$\Delta t_{\mathscr{A}\mathscr{E}} < \Delta\bar{t}_{\mathscr{A}\mathscr{B}},$$

が示される。

(2)　$\mathscr{O}$ の時空図において、AB および EB がそれぞれ傾き $1/v$ および v の直線であることから

$$\frac{\Delta x_{\mathscr{A}\mathscr{B}}}{\Delta t_{\mathscr{A}\mathscr{B}}} = v, \qquad \frac{\Delta x_{\mathscr{E}\mathscr{B}}}{\Delta t_{\mathscr{E}\mathscr{B}}} = \frac{1}{v},$$

である。これらを $\Delta x_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = \Delta x_{\mathscr{E}\mathscr{B}}$ と合わせて

$$\Delta t_{\mathscr{E}\mathscr{B}} = v^2 \Delta t_{\mathscr{A}\mathscr{B}},$$

を得る。これを

$$\Delta t_{\mathscr{A}\mathscr{E}} = \Delta t_{\mathscr{A}\mathscr{C}} - \Delta t_{\mathscr{E}\mathscr{C}} = \Delta t_{\mathscr{A}\mathscr{B}} - \Delta t_{\mathscr{E}\mathscr{B}},$$

に用いると

$$\Delta t_{\mathscr{A}\mathscr{E}} = (1-v^2)\Delta t_{\mathscr{A}\mathscr{B}},$$

を得る。一方

$$\Delta s^2_{\mathscr{A}\mathscr{E}} \overset{\Delta x_{\mathscr{A}\mathscr{E}}=0}{=} -\Delta t^2_{\mathscr{A}\mathscr{E}}, \qquad \Delta s^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}} \overset{\Delta x_{\mathscr{A}\mathscr{E}}=0}{=} -\Delta t^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}} + \Delta x^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}} \overset{\frac{\Delta x_{\mathscr{A}\mathscr{B}}}{\Delta t_{\mathscr{A}\mathscr{B}}}=v}{=} -(1-v^2)\Delta t^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}},$$

であるから、

$$\Delta s^2_{\mathscr{A}\mathscr{E}} = -\Delta t^2_{\mathscr{A}\mathscr{E}} = -(1-v^2)^2\Delta t^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = (1-v^2)\Delta s^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}},$$

が示される。

(3)　(2) 最終式において、$\mathscr{A},\mathscr{E}$ が $\mathscr{O}$ において同一空間座標であること、および $\mathscr{A},\mathscr{B}$ が $\overline{\mathscr{O}}$ において同一空間座標であること

$$\Delta s^2_{\mathscr{A}\mathscr{E}} \overset{\Delta x_{\mathscr{A}\mathscr{E}}=0}{=} -\Delta t^2_{\mathscr{A}\mathscr{E}}, \qquad \Delta s^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}} \overset{\Delta \bar{x}_{\mathscr{A}\mathscr{B}}=0}{=} -\Delta \bar{t}^2_{\mathscr{A}\mathscr{B}},$$

を用いると

$$\Delta t_{\mathscr{A}\mathscr{E}} = \sqrt{1-v^2}\,\Delta \bar{t}_{\mathscr{A}\mathscr{B}},$$

を得る。これと $\mathscr{B},\mathscr{E}$ が $\overline{\mathscr{O}}$ において同一時刻であること

$$\Delta \bar{t}_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = \Delta \bar{t}_{\mathscr{A}\mathscr{E}},$$

から

$$\Delta t_{\mathscr{A}\mathscr{E}} = \sqrt{1-v^2}\,\Delta \bar{t}_{\mathscr{A}\mathscr{E}},$$

となる。よって事象 $\mathscr{A},\mathscr{E}$ に注目する限り、$\mathscr{O}$ の時計は $\overline{\mathscr{O}}$ の時計より $\sqrt{1-v^2}$ の割合で遅れて進んでいる。

Lorentz 収縮　系 $\overline{\mathscr{O}}$ で静止している長さ l の棒を考える (図 14)。系 $\mathscr{O}$ の時空図では、棒の両端は速度 v で動いている。観測者 $\mathscr{O},\overline{\mathscr{O}}$ は、それぞれにとっての同時刻で棒の両端の座標差を測定することで棒の長さを算出する。

棒の静止系 $\overline{\mathscr{O}}$ における棒の長さは、棒の長さの定義上もちろん l である。では系 $\mathscr{O}$ における棒の長さはどうなるだろうか。図 14 の時空図で見ると、事象 $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ が $\mathscr{O}$ にとっての同時刻であるから、求めるものは $\Delta x_{\mathscr{A}\mathscr{B}}$ である。これを求めるため、まず $\overline{\mathscr{O}}$ から見て $\mathscr{A}$ と同時刻にある事象 $\mathscr{C}$ の、$\mathscr{O}$ における座標を求める。$\overline{\mathscr{O}}$ で同時刻ということは

$\Delta\bar{t}_{\mathscr{A}\mathscr{C}} = 0$ であり、また棒の長さの定義上 $\Delta\bar{x}_{\mathscr{A}\mathscr{C}} = l$ であるから、

$$\Delta s^2_{\mathscr{A}\mathscr{C}} = -\Delta\bar{t}^2_{\mathscr{A}\mathscr{C}} + \Delta\bar{x}^2_{\mathscr{A}\mathscr{C}} = l^2, \tag{1.59}$$

である。距離の不変性より

$$\Delta s^2_{\mathscr{A}\mathscr{C}} = -\Delta t^2_{\mathscr{A}\mathscr{C}} + \Delta x^2_{\mathscr{A}\mathscr{C}} = l^2, \tag{1.60}$$

であることと、$\bar{x}$ 軸が傾き v であること

$$\frac{\Delta t_{\mathscr{A}\mathscr{C}}}{\Delta x_{\mathscr{A}\mathscr{C}}} = v, \tag{1.61}$$

から

$$\Delta t_{\mathscr{A}\mathscr{C}} = \frac{vl}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \Delta x_{\mathscr{A}\mathscr{C}} = \frac{l}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{1.62}$$

が求まる。次に、$\mathscr{B}\mathscr{C}$ の傾きは $1/v$ であるから、

$$\Delta x_{\mathscr{A}\mathscr{B}} = \Delta x_{\mathscr{A}\mathscr{C}} - v\Delta t_{\mathscr{A}\mathscr{C}} = \frac{l}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{v^2 l}{\sqrt{1-v^2}} = l\sqrt{1-v^2}, \tag{1.63}$$

が求まる。従って、$\mathscr{O}$ にとっての同時刻で測った棒の長さ $\Delta x_{\mathscr{A}\mathscr{B}}$ は、棒の静止系での長さ $\Delta x_{\mathscr{A}\mathcal{C}}$ より短くなる。つまり Lorentz 収縮

Lorentz 収縮

$$\Delta x = \Delta\bar{x}\sqrt{1-v^2}, \tag{1.64}$$

が起きていることがわかる。時間の遅れと同様、この式の解釈には注意が必要である。Δx および $\Delta\bar{x}$ はそれぞれの系の同時刻で測った棒の先端の座標差、つまり $\Delta x = \Delta x_{\mathscr{A}\mathscr{B}}, \Delta\bar{x} = \Delta\bar{x}_{\mathscr{A}\mathscr{C}}$ である。

1.9 Lorentz 変換

これまで時空図を用いた幾何学的な議論をすることが多かった。特殊相対論の代数的性質を調べると、幾何学を用いずに座標の変換を議論することができる。その代数的性質は、Lorentz 変換と呼ばれる変換の代数的性質である。変換とは、任意の事象 $\mathscr{E}$ の系 $\mathscr{O}$ における座標 (t, x, y, z) と系 $\overline{\mathscr{O}}$ における座標 $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ との関係式であり、特殊相対論においてこの関係式は Lorentz 変換と呼ばれる。

これまでと同様、$\overline{\mathscr{O}}$ は $\mathscr{O}$ に対し x 方向に速度 v で動いているとする。また、簡単のため $\mathscr{O}$ と $\overline{\mathscr{O}}$ の空間座標の向きはお互いに揃っている (つまり、系 $\mathscr{O}$ と系 $\overline{\mathscr{O}}$ は相対的に空間回転はない) ものとする。考えられる最も一般的な線形変換は、x 軸に垂直な方向の長さが $\mathscr{O}$ から見ても $\overline{\mathscr{O}}$ から見ても同じであることを考慮すると、

$$\bar{t} = \alpha t + \beta x, \tag{1.65}$$

$$\bar{x} = \gamma t + \sigma x, \tag{1.66}$$

$$\bar{y} = y, \qquad \bar{z} = z, \tag{1.67}$$

である。ここで $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ は v にのみ依存する。以下これらの係数を決定する。

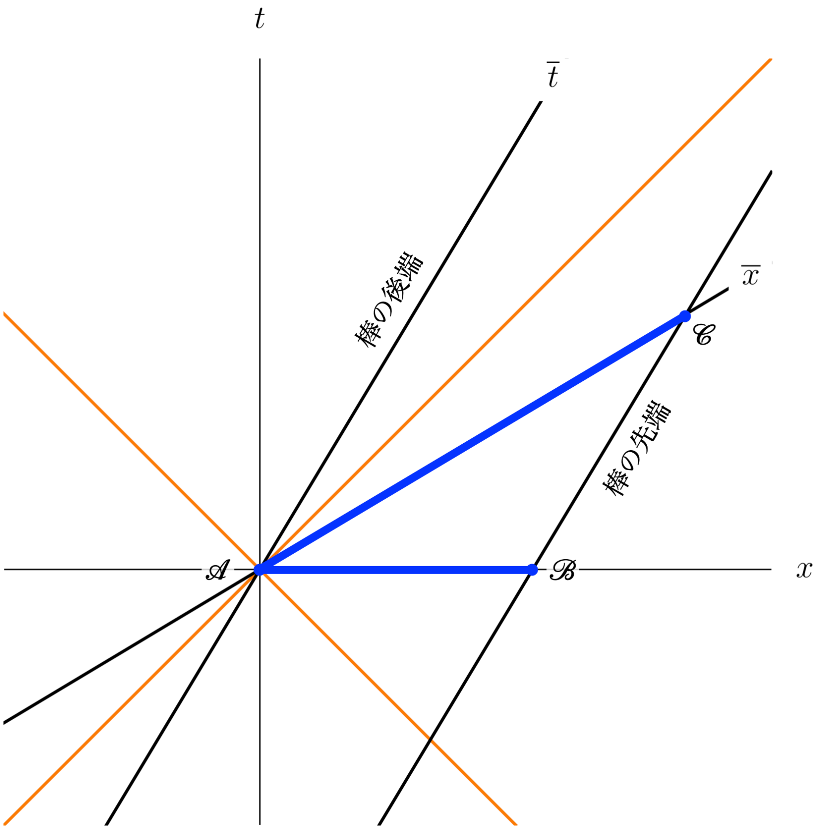


図 14: Lorentz 収縮。$v = 0.6$ の例。

まず、我々は以前に $\bar{t}$ 軸および $\bar{x}$ 軸が $\mathscr{O}$ の時空図でそれぞれ傾き $1/v$ および v の直線であることを見た。つまり

$$\bar{t}\text{軸}\ (\bar{x} = 0)\ :\ vt - x = 0, \tag{1.68}$$

$$\bar{x}\text{軸}\ (\bar{t} = 0)\ :\ t - vx = 0, \tag{1.69}$$

である。式 (1.65) より $\bar{t} = 0 \implies t = -(\beta/\alpha)x$ であり、式 (1.69) より $\bar{t} = 0 \implies t = vx$ である。同様に、式 (1.66) より $\bar{x} = 0 \implies t = -(\sigma/\gamma)x$ であり、式 (1.68) より $\bar{t} = 0 \implies t = x/v$ である。これらが矛盾しないためには

$$\frac{\beta}{\alpha} = -v, \tag{1.70}$$

$$\frac{\gamma}{\sigma} = -v, \tag{1.71}$$

であり、元の変換は

$$\bar{t} = \alpha(t - vx), \tag{1.72}$$

$$\bar{x} = \sigma(-vt + x), \tag{1.73}$$

となる。

次に、図 15 において事象 $\mathscr{P}\,(\bar{t} = 0, \bar{x} = a)$ と事象 $\mathscr{R}\,(\bar{t} = a, \bar{x} = 0)$ は光の経路で繋がっていることを用いる。事象 $\mathscr{P}, \mathscr{R}$

の $\mathcal{O}$ での座標を $(t_{\mathscr{P}}, x_{\mathscr{P}})$ および $(t_{\mathscr{R}}, x_{\mathscr{R}})$ とすると、

$$0 = \alpha(t_{\mathscr{P}} - vx_{\mathscr{P}}), \qquad a = \sigma(x_{\mathscr{P}} - vt_{\mathscr{P}}), \qquad a = \alpha(t_{\mathscr{R}} - vx_{\mathscr{R}}), \qquad 0 = \sigma(x_{\mathscr{R}} - vt_{\mathscr{R}}), \tag{1.74}$$

$$\Longrightarrow \qquad t_{\mathscr{P}} = \frac{a}{\sigma}\frac{v}{1-v^2}, \qquad x_{\mathscr{P}} = \frac{a}{\sigma}\frac{1}{1-v^2}, \qquad t_{\mathscr{R}} = \frac{a}{\alpha}\frac{1}{1-v^2}, \qquad x_{\mathscr{R}} = \frac{a}{\alpha}\frac{v}{1-v^2}, \tag{1.75}$$

となる。傾きが -1 であることに注意すると、

$$t_{\mathscr{R}} - t_{\mathscr{P}} = -(x_{\mathscr{R}} - x_{\mathscr{P}}) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\alpha} - \frac{v}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} - \frac{v}{\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\alpha}{\sigma} = 1, \tag{1.76}$$

となり、元の変換は

$$\bar{t} = \alpha(t - vx), \tag{1.77}$$

$$\bar{x} = \alpha(-vt + x), \tag{1.78}$$

となる。

最後に、距離の不変性

$$-\Delta\bar{t}^2 + \Delta\bar{x}^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2, \tag{1.79}$$

を用いる。特に原点からの距離を用いると、

$$-\alpha^2(t - vx)^2 + \alpha^2(x - vt)^2 = -t^2 + x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha^2 = \frac{1}{1-v^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{1.80}$$

となる。$v = 0$ のときに恒等変換となるためには $\alpha = +1/\sqrt{1-v^2}$ を選ぶ必要がある。以上より、Lorentz 変換が導かれた。

Lorentz 変換

$\overline{\mathcal{O}}$ は $\mathcal{O}$ に対し x 方向に速度 v で動いているとし、$\mathcal{O}$ の持つ座標を (t, x, y, z)、$\overline{\mathcal{O}}$ の持つ座標を $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ とすると

$$\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(t - vx), \qquad \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(-vt + x), \qquad \bar{y} = y, \qquad \bar{z} = z. \tag{1.81}$$

行列での表記もよく用いられる。

Lorentz 変換 (行列表記)

$\overline{\mathcal{O}}$ は $\mathcal{O}$ に対し x 方向に速度 v で動いているとし、$\mathcal{O}$ の持つ座標を (t, x, y, z)、$\overline{\mathcal{O}}$ の持つ座標を $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ とすると

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{1.82}$$

1.10 速度の合成則

速度の合成則を導こう。これまでと同様、$\overline{\mathcal{O}}$ は $\mathcal{O}$ に対し x 方向に速度 v で動いているとし、ある粒子が $\overline{\mathcal{O}}$ の $\bar{x}$ 軸方向に速度 $u_{\overline{\mathcal{O}}} = \Delta\bar{x}/\Delta\bar{t}$ で動いているとする (図 16)。$\mathcal{O}$ から見るとこの粒子は速度 $u_{\mathcal{O}} = \Delta x/\Delta t$ で動いている。$(\Delta t, \Delta x)$ と

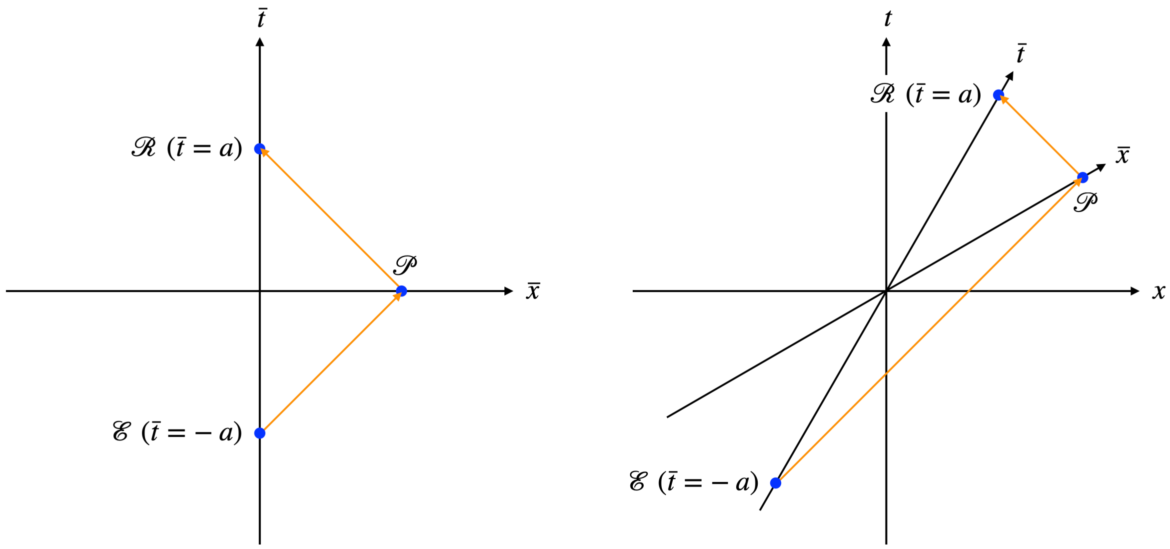


図 15: Lorentz 変換の決定のための時空図。基本的に図 4 の再掲である。

$(\Delta\bar{t},\Delta\bar{x})$ の変換則は式 (1.81) から

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\Delta\bar{t}+v\Delta\bar{x}\right), \qquad \Delta x = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(v\Delta\bar{t}+\Delta\bar{x}\right), \tag{1.83}$$

となるから、

$$u_{\mathscr{O}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\left(v\Delta\bar{t}+\Delta\bar{x}\right)/\sqrt{1-v^2}}{\left(\Delta\bar{t}+v\Delta\bar{x}\right)/\sqrt{1-v^2}} = \frac{v+\Delta\bar{x}/\Delta\bar{t}}{1+v\Delta\bar{x}/\Delta\bar{t}} = \frac{u_{\overline{\mathscr{O}}}+v}{1+u_{\overline{\mathscr{O}}}v}, \tag{1.84}$$

となる。これが速度の合成則である。

速度の合成則

$\mathscr{O}$ に対し x 方向に速度 v で動いている $\overline{\mathscr{O}}$ において速度 $u_{\overline{\mathscr{O}}}$ を持つ粒子の、$\mathscr{O}$ における速度 $u_{\mathscr{O}}$ は

$$u_{\mathscr{O}} = \frac{u_{\overline{\mathscr{O}}}+v}{1+u_{\overline{\mathscr{O}}}v}. \tag{1.85}$$

重要な点をいくつか述べる。

- $|u_{\overline{\mathscr{O}}}|<1$ かつ $|v|<1$ であれば、必ず $|u_{\mathscr{O}}|<1$ となる。実際、式 (1.85) より

$$u_{\mathscr{O}}-1 = \frac{u_{\overline{\mathscr{O}}}+v}{1+u_{\overline{\mathscr{O}}}v}-1 = -\frac{(1-u_{\overline{\mathscr{O}}})(1-v)}{1+u_{\overline{\mathscr{O}}}v}, \tag{1.86}$$

$$u_{\mathscr{O}}+1 = \frac{u_{\overline{\mathscr{O}}}+v}{1+u_{\overline{\mathscr{O}}}v}+1 = \frac{(1+u_{\overline{\mathscr{O}}})(1+v)}{1+u_{\overline{\mathscr{O}}}v}, \tag{1.87}$$

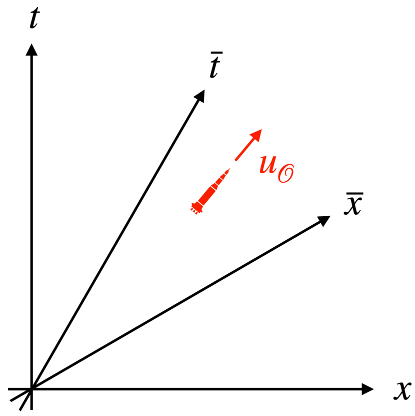
  であるから、1 つ目の式より $|u_{\overline{\mathscr{O}}}|<1$ かつ $|v|<1$ であれば $u_{\mathscr{O}}<1$ であり、2 つ目の式より $|u_{\overline{\mathscr{O}}}|<1$ かつ $|v|<1$ であれば $u_{\mathscr{O}}>-1$ である。

- $u_{\overline{\mathscr{O}}}=1$ であれば、どのような v に対しても $u_{\mathscr{O}}=1$ となる。

- $|u_{\overline{\mathscr{O}}}|\ll 1$ かつ $|v|\ll 1$ であれば

$$u_{\mathscr{O}} \simeq u_{\overline{\mathscr{O}}}+v, \tag{1.88}$$

となり、速度が小さいときに成り立つべき Galileo の速度の合成則になる。



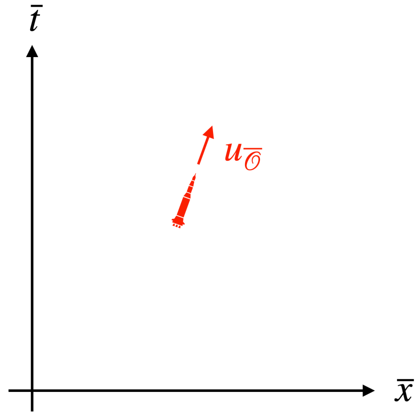


図 16: 速度の合成。系 $\overline{\mathcal{O}}$ は系 $\mathcal{O}$ に対し x 方向に速度 v で動いているとし、系 $\overline{\mathcal{O}}$ で速度 $u_{\overline{\mathcal{O}}}$ を持つ物体 (右) の系 $\mathcal{O}$ における速度を $u_{\mathcal{O}}$ とする (左)。

2. ベクトル解析

本節では特殊相対論におけるベクトル解析について学ぶ。以下で見るように、ベクトルの定義は

ベクトル

ベクトル $\vec{A}$ とは、ある系 $\mathscr{O}$ での数の集まりであって、その数を

$$\vec{A} \underset{\mathscr{O}}{\to} (A^0, A^1, A^2, A^3) = \{A^\alpha\},$$

のように成分と見なしたとき、別の系 $\overline{\mathscr{O}}$ での成分が

$$A^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta} A^\beta,$$

という関係で与えられるような量である。ここで $\left\{\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}\right\}$ は $\mathscr{O}$ と $\overline{\mathscr{O}}$ の座標変換 (Lorentz 変換) $x^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta} x^\beta$ である。

で与えられるのだが、このままでは抽象的すぎるため、まず天気予報を使ってその心を説明する。相対論的効果は一旦忘れて、日常の範囲での天気予報を考えよう。以下、次元は x, y の 2 次元のみ考える。

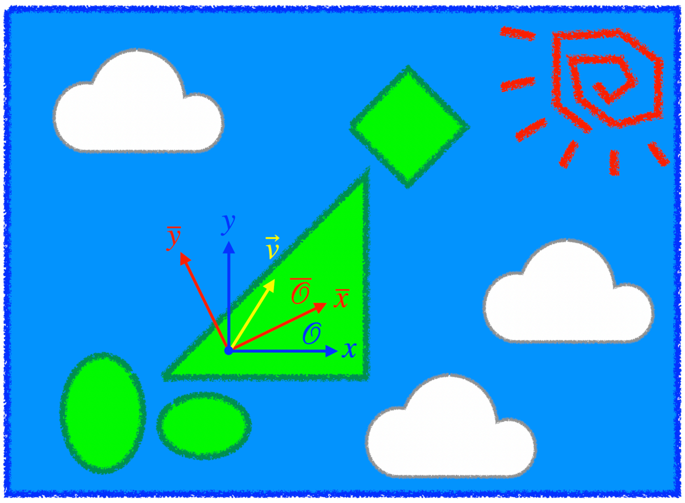


図 17: 神戸の天気予報。

2.0 天気予報

図 17 に地図が与えられている。気象予報士が「本日の神戸の気温は 20°C です」と言ったとしよう。数式で書くと

$$T_{\text{神戸}} = 20°\text{C}, \tag{2.1}$$

である。これは特に問題なく通じるだろう。次に気象予報士が「本日の神戸の風は (1 m/s, 2 m/s) です」と言ったとしよう。この場合、気象予報士がどの座標系を用いているか指定しないと風は一通りに定まらない。仮にこの気象予報士は東方向を x 軸、北方向を y 軸とする座標系を用いているとし、その座標系を $\mathscr{O}$ と呼ぼう。この気象予報士の予報を数式で

$$\vec{v}_{\text{神戸}} = (1\,\text{m/s}, 2\,\text{m/s}), \tag{2.2}$$

と書いて問題ないだろうか。仮に図の $\bar{x}$ 軸と $\bar{y}$ 軸からなる座標系 $\overline{\mathscr{O}}$ を用いて天気予報をする、別の風変わりな気象予報士がいるとして、そちらの予報に従うと、例えば

$$\vec{v}_{\text{神戸}} = (2\,\mathrm{m/s}, 1\,\mathrm{m/s}), \tag{2.3}$$

と書くことになる。本来、神戸の風 $\vec{v}_{\text{神戸}}$ は座標系とは関係なく存在する量なのに、上のような書き方をするとあたかも $\vec{v}_{\text{神戸}}$ が複数通り存在し、それぞれが矛盾しているように見えてしまう。そこで、$\vec{v}_{\text{神戸}}$ **という量はただ一つ存在し、これを特定の座標系で測っている**ことを明示する

$$\vec{v}_{\text{神戸}} \underset{\mathscr{O}}{\to} (1\,\mathrm{m/s}, 2\,\mathrm{m/s}), \tag{2.4}$$

$$\vec{v}_{\text{神戸}} \underset{\overline{\mathscr{O}}}{\to} (2\,\mathrm{m/s}, 1\,\mathrm{m/s}), \tag{2.5}$$

という記法を採用しよう。このそれぞれの成分を次にように呼ぶことにする

$$\vec{v}_{\text{神戸}} \underset{\mathscr{O}}{\to} (1\,\mathrm{m/s}, 2\,\mathrm{m/s}) =: (v^1, v^2), \tag{2.6}$$

$$\vec{v}_{\text{神戸}} \underset{\overline{\mathscr{O}}}{\to} (2\,\mathrm{m/s}, 1\,\mathrm{m/s}) =: (v^{\bar{1}}, v^{\bar{2}}). \tag{2.7}$$

注意すべきは、$\vec{v}_{\text{神戸}}$ は座標系に依らず存在する量である一方、その成分である v^1, v^2 や $v^{\bar{1}}, v^{\bar{2}}$ は座標系を指定して初めて確定するということである。ここで $\bar{v}^1, \bar{v}^2$ ではなく $v^{\bar{1}}, v^{\bar{2}}$ という記法にしたのは、成分の値が座標系の選択に由来することを明示するためである。座標系 x, y を $1, 2$ と表記し、座標系 $\bar{x}, \bar{y}$ を $\bar{1}, \bar{2}$ と表記している。$\bar{v}^1, \bar{v}^2$ と書いてしまうとこれらの成分が座標系 $\bar{1}, \bar{2}$ に由来することがわかりにくいが、$v^{\bar{1}}, v^{\bar{2}}$ と書くと選択された座標系がわかりやすい。

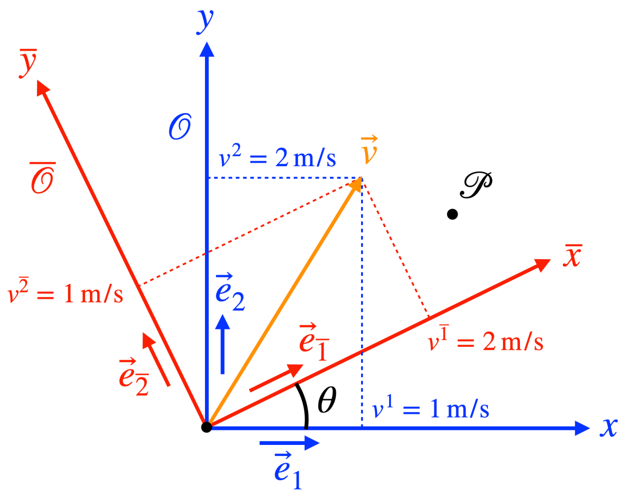


図 18: 座標系の変換と、それに伴う成分の変換。

さて、風の成分 $(v^1, v^2) = (1\,\mathrm{m/s}, 2\,\mathrm{m/s})$ と $(v^{\bar{1}}, v^{\bar{2}}) = (2\,\mathrm{m/s}, 1\,\mathrm{m/s})$ の関係はどうやったらわかるだろうか。それは座標系 $\mathscr{O}$ と $\overline{\mathscr{O}}$ の関係から読み取ることができる。任意の点 $\mathscr{P}$ に対して、その $\mathscr{O}$ での座標 $(x, y) =: (x^1, x^2)$ と $\overline{\mathscr{O}}$ での座標 $(\bar{x}, \bar{y}) =: (x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}})$ の関係は、図 18 に示された角度 θ を用いて

$$x^{\bar{i}} = \sum_{j=1}^{2} \Lambda^{\bar{i}}{}_{j}\, x^j, \tag{2.8}$$

$$\Lambda^{\bar{1}}{}_1 = \cos\theta, \qquad \Lambda^{\bar{1}}{}_2 = \sin\theta, \qquad \Lambda^{\bar{2}}{}_1 = -\sin\theta, \qquad \Lambda^{\bar{2}}{}_2 = \cos\theta, \tag{2.9}$$

となる。本講義ではあまり用いないが、行列で書いた方がわかりやすいかもしれない

$$\begin{pmatrix} x^{\bar{1}} \\ x^{\bar{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

今の場合 $\cos\theta = \frac{4}{5}, \sin\theta = \frac{3}{5}$ である。風の成分が $\mathscr{O}$ と $\overline{\mathscr{O}}$ でどう変わるかは、この $\left\{\Lambda^{\bar{i}}{}_{j}\right\}$ を用いて

$$v^{\bar{i}} = \sum_{j=1}^{2} \Lambda^{\bar{i}}{}_{j} v^{j}, \tag{2.11}$$

$$\Lambda^{\bar{1}}{}_{1} = \cos\theta, \qquad \Lambda^{\bar{1}}{}_{2} = \sin\theta, \qquad \Lambda^{\bar{2}}{}_{1} = -\sin\theta, \qquad \Lambda^{\bar{2}}{}_{2} = \cos\theta, \tag{2.12}$$

と表すことができる。行列で書くと

$$\begin{pmatrix} v^{\bar{1}} \\ v^{\bar{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

である。つまり、**風の成分は、座標系を $\mathscr{O}$ から $\overline{\mathscr{O}}$ に変更したとき、その座標の変換則を表す $\left\{\Lambda^{\bar{i}}{}_{j}\right\}$ を用いて、座標と同じように変換している**ことがわかる。このように、成分が座標と同じように変換するとき、その元となる量を物理においては**ベクトル**と言う。今の場合 $\vec{v}_{神戸}$ はベクトルであり、その成分が座標と同じように変換している[4][5]。一方、気温は座標を変換しても値が変わらない。このような、座標を変換しても値が変わらない量を**スカラー**と言う。

スカラー・ベクトル

座標変換 $x^{\bar{i}} = \sum_{j=1}^{2} \Lambda^{\bar{i}}{}_{j} x^{j}$ ($\Lambda^{\bar{1}}{}_{1} = \cos\theta, \Lambda^{\bar{1}}{}_{2} = \sin\theta, \Lambda^{\bar{2}}{}_{1} = -\sin\theta, \Lambda^{\bar{2}}{}_{2} = \cos\theta$) に対し

- スカラー : 値が変わらない (例 : 気温 T)
- ベクトル : 成分が座標と同じように変換する (例 : 風 $\vec{v}$)

物理におけるベクトルは、数学におけるベクトルと異なり、座標を変換したときに成分がどう変換するかという概念込みで定義されていることに注意しよう。

上の説明を少し別の視点から見ることもできる。まず、任意の点 $\mathscr{P}$ は座標系に依らず存在する。実際、神戸も明石も姫路も座標系とは関係なく存在する。それらの点の座標が系 $\mathscr{O}$ と $\overline{\mathscr{O}}$ で変わってしまうのは、基底が変更されたためであるという見方ができる。x, y 方向の基底ベクトルをそれぞれ $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ とし、$\bar{x}, \bar{y}$ 方向の基底ベクトルをそれぞれ $\vec{e}_{\bar{1}}, \vec{e}_{\bar{2}}$ とし

4 ややこしいことに、文献によっては**元となる量ではなく変換を受ける成分をベクトルと呼ぶことがある**。つまり今の場合、$\vec{v}_{神戸}$ の成分である (v^1, v^2) もベクトルと呼ぶこともある。本講義では成分とベクトルは区別する。

5 歴史的にはこのベクトル $\vec{v}_{神戸}$ を反変ベクトルと言う。「反」変と言う理由は、以下で見るように成分が基底と「反対」に変換するからである。一方、成分が基底と同じ変換をするようなベクトルを共変ベクトルと言い、これは後に双対空間という概念を学ぶ際に現れる。

よう[6]。図 18 からわかる通り、これらの関係は

$$\vec{e}_{\bar{i}} = \sum_{j=1}^{2} \Lambda^{j}{}_{\bar{i}} \vec{e}_j, \tag{2.17}$$

$$\Lambda^1{}_{\bar{1}} = \cos\theta, \qquad \Lambda^1{}_{\bar{2}} = -\sin\theta, \qquad \Lambda^2{}_{\bar{1}} = \sin\theta, \qquad \Lambda^2{}_{\bar{2}} = \cos\theta, \tag{2.18}$$

で与えられる。座標の変換に用いた $\left\{\Lambda^{\bar{i}}{}_j\right\}$ と似た記号 $\left\{\Lambda^{j}{}_{\bar{i}}\right\}$ を用いた理由は後でわかる。まとめて書くと

$$(\vec{e}_{\bar{1}} \quad \vec{e}_{\bar{2}}) = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

である。つまり、式 (2.13) および (2.19) の形で書くと、基底ベクトルと座標の変換から現れる行列が逆行列の関係にある結果、点 $\mathscr{P}$ を表すベクトル $\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 = x^{\bar{1}}\vec{e}_{\bar{1}} + x^{\bar{2}}\vec{e}_{\bar{2}}$ は座標系に依らなくなっている

$$x^{\bar{1}}\vec{e}_{\bar{1}} + x^{\bar{2}}\vec{e}_{\bar{2}} = (\vec{e}_{\bar{1}} \quad \vec{e}_{\bar{2}})\begin{pmatrix} x^{\bar{1}} \\ x^{\bar{2}} \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2)\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2. \tag{2.20}$$

風についても同様に、基底ベクトルと成分から現れる行列が逆行列の関係にある結果、$\vec{v}_{\text{神戸}} = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 = v^{\bar{1}}\vec{e}_{\bar{1}} + v^{\bar{2}}\vec{e}_{\bar{2}}$ 自体は座標系に依らなくなっている

$$v^{\bar{1}}\vec{e}_{\bar{1}} + v^{\bar{2}}\vec{e}_{\bar{2}} = (\vec{e}_{\bar{1}} \quad \vec{e}_{\bar{2}})\begin{pmatrix} v^{\bar{1}} \\ v^{\bar{2}} \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2)\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2. \tag{2.21}$$

言い方を変えると、座標系に依らず存在する $\vec{v}_{\text{神戸}}$ について、その成分が座標系ごとに変わってしまうのは、座標変換に伴い基底ベクトルが変換されているからと言える。これを一般化して、**座標系に依らず存在する量について、その成分が座標系ごとに変わってしまうのは、座標変換に伴い基底ベクトルが変換されているから**という見方ができる。ちなみに、座標の変換と基底ベクトルの変換に現れる、添字の上下および前後が異なる $\left\{\Lambda^{\bar{i}}{}_j\right\}$ と $\left\{\Lambda^{j}{}_{\bar{i}}\right\}$ という記法は、一方が他方の逆行列であることを示す便利な記法である。これについては後ほど慣れることにしよう。

さて、天気予報で考えられる量はスカラーとベクトルのみだろうか。例えば未来の天気予報で、地盤にかかる圧力が予報されるようになったとする。その場合、座標系 $\mathscr{O}$ の気象予報士は

$$\sigma^{ij} = (i \text{ 方向に垂直な面にかかる } j \text{ 方向の圧力}), \tag{2.22}$$

---

[6] これら $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ および $\vec{e}_{\bar{1}}, \vec{e}_{\bar{2}}$ はベクトルである。$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ を座標系 $\mathscr{O}$ で成分表示すると

$$\vec{e}_1 \underset{\mathscr{O}}{\to} (1, 0), \qquad \vec{e}_2 \underset{\mathscr{O}}{\to} (0, 1), \tag{2.14}$$

であるが、これを座標系 $\overline{\mathscr{O}}$ で成分表示して

$$\vec{e}_1 \underset{\overline{\mathscr{O}}}{\to} (\cos\theta, -\sin\theta), \qquad \vec{e}_2 \underset{\overline{\mathscr{O}}}{\to} (\sin\theta, \cos\theta), \tag{2.15}$$

と書くこともできる。$\vec{e}_{\bar{1}}, \vec{e}_{\bar{2}}$ についても同様に座標系 $\mathscr{O}$ で成分表示すると

$$\vec{e}_{\bar{1}} \underset{\mathscr{O}}{\to} (\cos\theta, \sin\theta), \qquad \vec{e}_{\bar{2}} \underset{\mathscr{O}}{\to} (-\sin\theta, \cos\theta), \tag{2.16}$$

となる。

という、$2\times 2=4$ 成分を予報する。この量を座標変換する、つまりこの量が座標系 $\overline{\mathcal{O}}$ の気象予報士が予報する

$$\sigma^{\bar{i}\bar{j}} = (\bar{i}\text{ 方向に垂直な面にかかる }\bar{j}\text{ 方向の圧力}), \tag{2.23}$$

という 4 成分とどういう関係にあるか書き下してみると、「i 方向 $\leftrightarrow$ $\bar{i}$ 方向」という変換が上で見たベクトルの成分と同じ振る舞いをし、「j 方向 $\leftrightarrow$ $\bar{j}$ 方向」という変換もベクトルの成分と同じ振る舞いをする結果、

$$\sigma^{\bar{i}\bar{j}} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\Lambda^{\bar{i}}{}_{i}\Lambda^{\bar{j}}{}_{j}\sigma^{ij}, \tag{2.24}$$

という関係があることがわかる。これら σ^{ij} あるいは $\sigma^{\bar{i}\bar{j}}$ は、ベクトルの場合と同様、座標系に依らない量

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma^{11}\vec{e}_1\vec{e}_1 + \sigma^{12}\vec{e}_1\vec{e}_2 + \sigma^{21}\vec{e}_2\vec{e}_1 + \sigma^{22}\vec{e}_2\vec{e}_2 \\ &= \sigma^{\bar{1}\bar{1}}\vec{e}_{\bar{1}}\vec{e}_{\bar{1}} + \sigma^{\bar{1}\bar{2}}\vec{e}_{\bar{1}}\vec{e}_{\bar{2}} + \sigma^{\bar{2}\bar{1}}\vec{e}_{\bar{2}}\vec{e}_{\bar{1}} + \sigma^{\bar{2}\bar{2}}\vec{e}_{\bar{2}}\vec{e}_{\bar{2}},\end{aligned} \tag{2.25}$$

があり、それを座標系 $\mathcal{O}$ あるいは $\overline{\mathcal{O}}$ で成分表示したものとみなすことができる。そして、このようなベクトルの変換性を多重に持つ量を**テンソル**と言う[7]。ベクトルの際に導入した記法を用いると

$$\sigma \underset{\mathcal{O}}{\to} \left\{\sigma^{ij}\middle| i=1,2, j=1,2\right\}, \tag{2.26}$$

$$\sigma \underset{\overline{\mathcal{O}}}{\to} \left\{\sigma^{\bar{i}\bar{j}}\middle| \bar{i}=\bar{1},\bar{2}, \bar{j}=\bar{1},\bar{2}\right\}, \tag{2.27}$$

と書くこともできる。ちなみに、ここに挙げた σ には応力テンソルという名前が付いている。

コラム：$\vec{e}_i\vec{e}_j$？

テンソル σ は上記の通りベクトルの変換性を複数持つ量である。ところで、σ を基底で展開した

$$\sigma = \sigma^{11}\vec{e}_1\vec{e}_1 + \sigma^{12}\vec{e}_1\vec{e}_2 + \sigma^{21}\vec{e}_2\vec{e}_1 + \sigma^{22}\vec{e}_2\vec{e}_2, \tag{2.28}$$

に現れる項について疑問に思うかもしれない。例えば $\sigma^{11}\vec{e}_1\vec{e}_1$ について、σ^{11} はただの数であるからいいとして、$\vec{e}_1\vec{e}_1$ とは何だろうか。これは内積でも外積でもなく、ベクトルをそのまま 2 本書いただけである。もう少し丁寧な書き方として、4 つの基底 $\{(\vec{e}_1,\vec{e}_1),(\vec{e}_1,\vec{e}_2),(\vec{e}_2,\vec{e}_1),(\vec{e}_2,\vec{e}_2)\}$ によって張られるベクトル空間があると考えて

$$\sigma = \sigma^{11}(\vec{e}_1,\vec{e}_1) + \sigma^{12}(\vec{e}_1,\vec{e}_2) + \sigma^{21}(\vec{e}_2,\vec{e}_1) + \sigma^{22}(\vec{e}_2,\vec{e}_2), \tag{2.29}$$

とした方がわかりやすいかもしれない。この基底 $\left\{(\vec{e}_i,\vec{e}_j)\right\}$ は、元のベクトル空間の基底 $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ を用いて、多重線形性という性質を持つように作った新しい基底である。多重線形性と言うと仰々しいが、要するに

- 片方を定数 c 倍したものは、それ自体の定数 c 倍である

$$(c\vec{A},\vec{B}) = (\vec{A},c\vec{B}) = c(\vec{A},\vec{B}), \tag{2.30}$$

- 1 つ目の要素について、足してから括弧を取ったものは、括弧を取ってから足したものと同じである

$$(\vec{A}_1+\vec{A}_2,\vec{B}) = (\vec{A}_1,\vec{B}) + (\vec{A}_2,\vec{B}), \tag{2.31}$$

[7] ベクトルの場合と同様、文献によっては**成分である** σ^{ij} **や** $\sigma^{\bar{i}\bar{j}}$ **もテンソルと呼ぶことがある**。

- 2つ目の要素について、足してから括弧を取ったものは、括弧を取ってから足したものと同じである

$$(\vec{A},\vec{B}_1+\vec{B}_2)=(\vec{A},\vec{B}_1)+(\vec{A},\vec{B}_2), \tag{2.32}$$

という性質を持つ括弧 $(,)$ を導入して、それに元のベクトル空間の基底 $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ を入れて作った量が $\left\{(\vec{e}_i,\vec{e}_j)\right\}$ である。

実はこの手続きは、**テンソル積**という演算により2つのベクトル空間から新しいベクトル空間を作る手続きである。つまり、2つのベクトル空間 V,W を用意して、その基底

$$\left\{\vec{e}_i^{\,(V)}\right\}=\left\{\vec{e}_1^{\,(V)},\vec{e}_2^{\,(V)},\cdots,\vec{e}_n^{\,(V)}\right\}, \tag{2.33}$$

$$\left\{\vec{e}_j^{\,(W)}\right\}=\left\{\vec{e}_1^{\,(W)},\vec{e}_2^{\,(W)},\cdots,\vec{e}_m^{\,(W)}\right\}, \tag{2.34}$$

を取ったとき、上記の多重線形性を持つ括弧 $(,)$ を用いて新しいベクトル空間の基底

$$\left\{(\vec{e}_i^{\,(V)},\vec{e}_j^{\,(W)})\right\}=\left\{(\vec{e}_1^{\,(V)},\vec{e}_1^{\,(W)}),(\vec{e}_1^{\,(V)},\vec{e}_2^{\,(W)}),\cdots,(\vec{e}_2^{\,(V)},\vec{e}_1^{\,(W)}),(\vec{e}_2^{\,(V)},\vec{e}_2^{\,(W)}),\cdots,(\vec{e}_n^{\,(V)},\vec{e}_m^{\,(W)})\right\}, \tag{2.35}$$

を作ることができる。こうして作られた基底が張るベクトル空間を V と W のテンソル積 $V\otimes W$ と言う。

コラム：量？

これまで「量の成分が座標変換に伴い変換されること」そして「量の成分の変換の仕方によってスカラー・ベクトル・テンソルという分類があること」を見てきた。しかし実は「量」という言葉には暗黙の前提があり、特殊相対論で議論されるのはこの前提を満たすものである。以下、どのような前提があるか見てみよう。

まず、量の定義はこちらの自由なのだから、例えば

$$Q=v^{1(\mathscr{O})}\ [\mathrm{m/s}]+T\ [{}^\circ\mathrm{C}],$$

という量を定義するのも自由である。ここで $v^{1(\mathscr{O})}$ は座標系 $\mathscr{O}$ で測った風の x 成分 v^1 である。つまり Q は、地図の各点において、座標系 $\mathscr{O}$ で測った風の x 成分 v^1 を m/s 単位で測った無次元量と、気温 T を °C 単位で測った無次元量を足した量である。上の例で言えば、Q の神戸における値は $Q_{\text{神戸}}=1+20=21$ となる。この量を座標系 $\overline{\mathscr{O}}$ で評価しようとすると、一項目は定義上座標系 $\mathscr{O}$ で測った x 成分であるから、座標系 $\mathscr{O}$ の $v^{1(\mathscr{O})}$ を座標系 $\overline{\mathscr{O}}$ で測った量で表すことで

$$Q=(\cos\theta\, v^{1(\overline{\mathscr{O}})}-\sin\theta\, v^{2(\overline{\mathscr{O}})})\ [\mathrm{m/s}]+T\ [{}^\circ\mathrm{C}],$$

と評価することになる。ここで $v^{1(\overline{\mathscr{O}})},v^{2(\overline{\mathscr{O}})}$ は座標系 $\overline{\mathscr{O}}$ で測った風の x 成分 $v^{\bar{1}},v^{\bar{2}}$ である。この量 Q の値は座標系に依らない。なぜなら、どの座標系で評価しようとも、定義上 $(\cos\theta\, v^{1(\overline{\mathscr{O}})}-\sin\theta\, v^{2(\overline{\mathscr{O}})})$ 部分は座標系 $\mathscr{O}$ で見たときの x 成分となるような組み合わせに取られているためである。量の定義としてはこれで問題ないが、この量は用いる座標系により表式が変わる。つまり、座標系 $\mathscr{O}$ を用いたときにだけ簡潔な形になり、他の一般の座標系では座標系 $\mathscr{O}$ からの角度 θ の関数として上記のような項の組み合わせを計算しなければならない。特殊相対論の文脈で言うと、このような量があからさまに物理法則に現れてしまうと、相対性原理 (任意の系は対等であり、物理法則は同じ形を取る) に反する。そのため、このような量は通常考察の対象から外される。

一方、定義を変えて

$$Q'(\tilde{\mathscr{O}})=v^{1(\tilde{\mathscr{O}})}\ [\mathrm{m/s}]+T\ [{}^\circ\mathrm{C}],$$

という量を考えよう。ここで $1(\tilde{\mathscr{O}})$ は、$Q'(\tilde{\mathscr{O}})$ の引数に応じて、$\tilde{\mathscr{O}}=\mathscr{O}$ であれば $1(\mathscr{O})$ 成分 $= x$ 成分、$\tilde{\mathscr{O}}=\overline{\mathscr{O}}$ であれば $1(\overline{\mathscr{O}})$ 成分 $=\overline{x}$ 成分とする、という意味である。先程の Q とは異なり、Q' は用いる座標系によって表式を変えることはない。しかし Q' の値は座標系に依存する。なぜなら $v^{1(\tilde{\mathscr{O}})}$ は座標系 $\tilde{\mathscr{O}}$ によって異なる値を取るからである。上で見たような、「座標系によって値を変える量は、座標系に依らず存在する量の成分であり、成分が値を変えるのは座標変換に伴い基底が変換されているため」という見方を、量の満たすべき性質として要求するとしよう。Q' がこの性質を満たすには、基底ベクトルとうまく組み合わせることで座標系に依らない量を作れる必要があるが、$v^{1(\tilde{\mathscr{O}})}$ と T が足し合わされているためにそのようなことができない。このような量も通常考察の対象から外される。

最後に

$$Q''(\tilde{\mathscr{O}})=(v^{1(\tilde{\mathscr{O}})}\ [\mathrm{m/s}])^2+(v^{2(\tilde{\mathscr{O}})}\ [\mathrm{m/s}])^2+T\ [{}^\circ\mathrm{C}],$$

という量を考えよう。$1(\tilde{\mathscr{O}})$ と $2(\tilde{\mathscr{O}})$ は $\tilde{\mathscr{O}}=\mathscr{O}$ であれば x 成分と y 成分、$\tilde{\mathscr{O}}=\overline{\mathscr{O}}$ であれば $\overline{x}$ 成分と $\overline{y}$ 成分である。Q' と同様、Q'' は用いる座標系によって表式を変えることはない。そして、Q'' は座標系によって値を変えない。これは $(v^{1(\tilde{\mathscr{O}})}\ [\mathrm{m/s}])^2+(v^{2(\tilde{\mathscr{O}})}\ [\mathrm{m/s}])^2$ が風速の絶対値二乗であることからもわかるが、具体的には例えば $\mathscr{O}$ と $\overline{\mathscr{O}}$ について

$$(v^{\overline{1}})^2+(v^{\overline{2}})^2=\begin{pmatrix} v^{\overline{1}} & v^{\overline{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^{\overline{1}} \\ v^{\overline{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}=(v^1)^2+(v^2)^2,$$

と確認できる。特殊相対論では、このような「座標系によって表式が変わらない」かつ「座標系によって値を変えない、もしくは座標系によって値を変える場合は座標系に依らず存在する量の成分になっている」量のみを考察する。そのような性質を持たない量は、物理量として不適であるとみなす。

2.1 ベクトルの定義

特殊相対論におけるベクトル　以上で準備が済んだので、特殊相対論におけるベクトルを導入する。ここから次元は 4 次元である。ベクトルの典型的な例として変位ベクトル $\Delta\vec{x}$ がある。これは一つの事象と別の事象を結ぶものであり、事象は座標系に依らず存在するものであるから、変位ベクトル $\Delta\vec{x}$ も座標系とは独立した概念である。これを座標系 $\mathscr{O}$ で成分表示したものを、先程と同じく

$$\Delta\vec{x}\underset{\mathscr{O}}{\to}(\Delta t,\Delta x,\Delta y,\Delta z), \tag{2.36}$$

と書くことにしよう。記号 $\underset{\mathscr{O}}{\to}$ は、その右に書かれた値が左の量の系 $\mathscr{O}$ における成分である、という意味である。第 1 節で定義した記法を用いると

$$\Delta\vec{x}\underset{\mathscr{O}}{\to}(\Delta x^0,\Delta x^1,\Delta x^2,\Delta x^3), \tag{2.37}$$

とも書ける。また、右辺をまとめて表す記法として

$$\Delta\vec{x}\underset{\mathscr{O}}{\to}\{\Delta x^\alpha\}, \tag{2.38}$$

も用いることができる。ギリシャ文字は $0,1,2,3$ の値を取ることを思い出そう。この量を別の座標系 $\overline{\mathscr{O}}$ で成分表示するときは

$$\Delta\vec{x} \underset{\overline{\mathscr{O}}}{\rightarrow} \left\{\Delta x^{\overline{\alpha}}\right\}, \tag{2.39}$$

と書く。繰り返しになるが、$\Delta\overline{x}^{\alpha}$ と書かずに $\Delta x^{\overline{\alpha}}$ と書く理由は、量 $\Delta\vec{x}$ は座標系に依らない量であり、$\Delta x^{\overline{\alpha}}$ が $\Delta\vec{x}$ の座標 $\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}$ における成分であることを明示するためである。

Einstein の総和の規約　第 1 節と同じく、$\overline{\mathscr{O}}$ は $\mathscr{O}$ に対し x 方向に速度 v で動いているとすると、新しい成分 $\Delta x^{\overline{\alpha}}$ は Lorentz 変換により成分 Δx^{α} を用いて

$$\Delta x^{\overline{0}} = \frac{\Delta x^0}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{v\Delta x^1}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \Delta x^{\overline{1}} = -\frac{v\Delta x^0}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\Delta x^1}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \cdots \qquad , \tag{2.40}$$

と書ける。これは線形変換であり、次のように簡潔に書くことができる

$$\Delta x^{\overline{\alpha}} = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}\Delta x^{\beta}. \tag{2.41}$$

ここで $\left\{\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}\right\}$ は Lorentz 変換を与える $4\times4=16$ 個の数であり、

$$\Lambda^{\overline{0}}{}_{0} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \Lambda^{\overline{0}}{}_{1} = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \Lambda^{\overline{1}}{}_{0} = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \Lambda^{\overline{1}}{}_{1} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \Lambda^{\overline{2}}{}_{2} = 1, \qquad \Lambda^{\overline{3}}{}_{3} = 1, \tag{2.42}$$

かつその他は 0 である。特殊相対論においては式 (2.41) のような和が頻繁に現れる。そこで以下の Einstein の総和の規約を導入する。

Einstein の総和の規約

一つの添字が上付きで、それと同じ添字が下付きで出てくる表式では、
その添え字の取り得る値全てについての総和を取る。

例えば

$$A_{\alpha}B^{\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{3} A_{\alpha}B^{\alpha}, \qquad C_iD^i = \sum_{i=1}^{3} C_iD^i, \qquad T^{\gamma}E_{\gamma\alpha} = \sum_{\gamma=0}^{3} T^{\gamma}E_{\gamma\alpha}, \tag{2.43}$$

である一方、

$$A_{\alpha}B^{\beta}, \qquad C_iD^j, \qquad T^{\gamma}B_{\beta\alpha}, \qquad A_{\beta}A_{\beta}, \tag{2.44}$$

はいずれの添字についても和を取っていない。

ダミーの添字とフリーな添字　Einstein の総和の規約を用いると、Lorentz 変換は

$$\Delta x^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}\Delta x^{\beta}, \tag{2.45}$$

と書くことができる。この式は

$$\Delta x^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\gamma}\Delta x^{\gamma}, \tag{2.46}$$

と書いても全く同じことに注意しよう。このような、総和を表すために使用される添字を**ダミーの添字**と言う。上の例では、ダミーの添字を β から γ に置き換えても全く同じである。一方、

$$\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}\Delta x^{\beta}, \qquad \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{i}\Delta x^{i}, \tag{2.47}$$

の 2 つは別の値を取る。なぜなら、γ は $0,1,2,3$ の範囲をとるのに対して、i は $1,2,3$ の範囲しか取らないからである。具体的には

$$\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}\Delta x^{\beta} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{0}\Delta x^{0} + \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{i}\Delta x^{i}, \tag{2.48}$$

の関係がある。式 (2.45) は、$\overline{\alpha}$ の取り得る 4 つの値に対して、4 つの異なる式を表している。この $\overline{\alpha}$ のように、和を取らない添字を**フリーな添字**と言う。式にフリーな添字が含まれている場合、その添字の取り得る全ての値に対してその式が成立する場合に限り、その式は正しい式となる。また、ダミーの添字と同じく、その添字の取る範囲が同じ場合には添字の付け替えが可能である。例えば式 (2.45) は

$$\Delta x^{\overline{\gamma}} = \Lambda^{\overline{\gamma}}{}_{\beta}\Delta x^{\beta}, \tag{2.49}$$

と書いてもよい。その際、添字は全て付け替えなければならない。例えば

$$\Delta x^{\overline{\gamma}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}\Delta x^{\beta}, \tag{2.50}$$

と書いてしまうと誤りである。なぜなら、元の式は $\Delta x^{\overline{0}} = \Lambda^{\overline{0}}{}_{\beta}\Delta x^{\beta}$, $\Delta x^{\overline{1}} = \Lambda^{\overline{1}}{}_{\beta}\Delta x^{\beta}$, $\Delta x^{\overline{2}} = \Lambda^{\overline{2}}{}_{\beta}\Delta x^{\beta}$, $\Delta x^{\overline{3}} = \Lambda^{\overline{3}}{}_{\beta}\Delta x^{\beta}$ の全てが成立するという意味であったが、式 (2.50) はそのような意味に解釈できないからである。

ベクトル　一般のベクトルは次のように定義される。

ベクトル

ベクトル $\vec{A}$ とは、ある系 $\mathcal{O}$ での数の集まりであって、その数を

$$\vec{A} \underset{\mathcal{O}}{\rightarrow} (A^0, A^1, A^2, A^3) = \{A^{\alpha}\},$$

のように成分と見なしたとき、別の系 $\overline{\mathcal{O}}$ での成分が

$$A^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}A^{\beta}, \tag{2.51}$$

という関係で与えられるような量である。ここで $\left\{\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}\right\}$ は $\mathcal{O}$ と $\overline{\mathcal{O}}$ の座標変換 (Lorentz 変換) $x^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}x^{\beta}$ である。

こう定義する理由は先に説明した。つまり、ベクトルとは座標系に依らず存在する量であるが、基底ベクトルを用いて表示したために、その成分が座標変換に伴って座標と同じように変換してしまうもの、ということである。また、後者の式 $A^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}A^{\beta}$ から、ある系でベクトルの成分がわかっていれば他の系での成分は一意的に決まることに注意しよう。

2.2 ベクトル代数

基底ベクトル　我々は 4 次元時空を考えているから、任意の系 $\mathcal{O}$ は基底ベクトルを 4 つ選べば定めることができる。ベクトルの成分表示とは、そのベクトルをこれら基底ベクトルの和で表したときの係数であるから、基底ベクトル自身の

$\mathscr{O}$ における成分表示はもちろん

$$\vec{e}_0 \underset{\mathscr{O}}{\to} (1,0,0,0), \qquad \vec{e}_1 \underset{\mathscr{O}}{\to} (0,1,0,0), \qquad \vec{e}_2 \underset{\mathscr{O}}{\to} (0,0,1,0), \qquad \vec{e}_3 \underset{\mathscr{O}}{\to} (0,0,0,1), \tag{2.52}$$

である。同様に、$\overline{\mathscr{O}}$ の基底ベクトルの $\overline{\mathscr{O}}$ における成分表示は

$$\vec{e}_{\overline{0}} \underset{\overline{\mathscr{O}}}{\to} (1,0,0,0), \qquad \vec{e}_{\overline{1}} \underset{\overline{\mathscr{O}}}{\to} (0,1,0,0), \qquad \vec{e}_{\overline{2}} \underset{\overline{\mathscr{O}}}{\to} (0,0,1,0), \qquad \vec{e}_{\overline{3}} \underset{\overline{\mathscr{O}}}{\to} (0,0,0,1), \tag{2.53}$$

である。成分表示が同じ $(1,0,0,0)$ であっても、$\vec{e}_0$ と $\vec{e}_{\overline{0}}$ は異なるベクトルである。同一性は $\underset{\mathscr{O}}{\to}$ と $\underset{\overline{\mathscr{O}}}{\to}$ の部分まで含めて判定しなければならない。さて、上の定義は Kronecker のデルタ

$$\delta_\alpha^\beta := \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta), \\ 0 & (\alpha \neq \beta), \end{cases} \tag{2.54}$$

を用いて

$$(\vec{e}_\alpha)^\beta = \delta_\alpha^\beta, \tag{2.55}$$

と書けることも確認しよう。ここで Kronecker のデルタについては、添字の上下が重要になる場合があるため、以前定義した式 (1.19) ではなく式 (2.54) を以降では用いる。任意のベクトル $\vec{A}$ が

$$\vec{A} \underset{\mathscr{O}}{\to} (A^0, A^1, A^2, A^3), \tag{2.56}$$

と成分表示されるとき、元のベクトル $\vec{A}$ は基底ベクトルを用いて

$$\vec{A} = A^0\vec{e}_0 + A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2 + A^3\vec{e}_3 = A^\alpha\vec{e}_\alpha, \tag{2.57}$$

と表すことができる。

基底ベクトルの変換　上の議論は任意の系について成り立つから、系 $\overline{\mathscr{O}}$ の基底ベクトルを用いて

$$\vec{A} = A^{\overline{0}}\vec{e}_{\overline{0}} + A^{\overline{1}}\vec{e}_{\overline{1}} + A^{\overline{2}}\vec{e}_{\overline{2}} + A^{\overline{3}}\vec{e}_{\overline{3}} = A^{\overline{\alpha}}\vec{e}_{\overline{\alpha}}, \tag{2.58}$$

とも書ける。よって

$$A^\alpha\vec{e}_\alpha = A^{\overline{\alpha}}\vec{e}_{\overline{\alpha}}, \tag{2.59}$$

が成り立つ。一方ベクトルの定義から、成分の間には変換則

$$A^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_\beta A^\beta, \tag{2.60}$$

があるため

$$A^\alpha\vec{e}_\alpha = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_\beta A^\beta \vec{e}_{\overline{\alpha}}, \tag{2.61}$$

が得られる。この右辺において、添字 β は単に総和 $\sum_{\beta=0}^{3}$ を取る際に現れるダミーの添字であるから、α と書いて総和 $\sum_{\alpha=0}^{3}$ としても同じである。同様に添字 $\overline{\alpha}$ を $\overline{\beta}$ としても同じである。よって

$$A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha} = \Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}A^{\alpha}\vec{e}_{\overline{\beta}}, \tag{2.62}$$

となる。さらに、$\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}$ と A^{α} は (α と $\overline{\beta}$ を固定すると) ただの数であるから、積の順番を入れ替えても同じである。よって

$$A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha} = A^{\alpha}\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}\vec{e}_{\overline{\beta}}, \tag{2.63}$$

つまり

$$A^{\alpha}(\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}\vec{e}_{\overline{\beta}} - \vec{e}_{\alpha}) = 0, \tag{2.64}$$

となる。ここで $\vec{A}$ は任意のベクトルであるから、この式は任意の $\{A^{\alpha}\}$ に対して成り立たなくてはならない。従って α の値に関わらず

$$\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}\vec{e}_{\overline{\beta}} - \vec{e}_{\alpha} = 0, \tag{2.65}$$

すなわち

基底ベクトルの変換則

$$\vec{e}_{\alpha} = \Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}\vec{e}_{\overline{\beta}}, \tag{2.66}$$

が成り立つことがわかる。これは成分の変換則

$$A^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}A^{\beta}, \tag{2.67}$$

とは別であることに注意しよう。

具体例　これまでと同様、$\overline{\mathscr{O}}$ は $\mathscr{O}$ に対し x 方向に速度 v で動いているとする。このとき行列 $\left[\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}\right]$ は

$$\left[\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}\right] = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{2.68}$$

である。以降、行列で書く際には $\left[\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}\right]$ を用い、単に集合として提示する際には $\left\{\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}\right\}$ を用いるものとする。各行は $\overline{\beta} = \overline{0}, \cdots, \overline{3}$ を表し、各列は $\alpha = 0, \cdots, 3$ を表している。例えばベクトル $\vec{A}$ の系 $\mathscr{O}$ における成分が

$$\vec{A} \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (5, 0, 0, 2), \tag{2.69}$$

のとき、系 $\overline{\mathscr{O}}$ における成分は

$$A^{\overline{0}} = \Lambda^{\overline{0}}{}_0 A^0 + \Lambda^{\overline{0}}{}_1 A^1 + \cdots = \gamma \cdot 5 + (-\gamma v) \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 5\gamma, \tag{2.70}$$

$$A^{\overline{1}} = \Lambda^{\overline{1}}{}_0 A^0 + \Lambda^{\overline{1}}{}_1 A^1 + \cdots = (-\gamma v) \cdot 5 + \gamma \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = -5\gamma v, \tag{2.71}$$

$$A^{\overline{2}} = \Lambda^{\overline{2}}{}_0 A^0 + \Lambda^{\overline{2}}{}_1 A^1 + \cdots = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 0, \tag{2.72}$$

$$A^{\overline{3}} = \Lambda^{\overline{3}}{}_0 A^0 + \Lambda^{\overline{3}}{}_1 A^1 + \cdots = 0 \cdot 5 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2, \tag{2.73}$$

つまり

$$\vec{A} \underset{\overline{\mathscr{O}}}{\to} (5\gamma, -5\gamma v, 0, 2), \tag{2.74}$$

となる。基底ベクトルについては

$$\vec{e}_0 = \Lambda^{\overline{0}}{}_0 \vec{e}_{\overline{0}} + \Lambda^{\overline{1}}{}_0 \vec{e}_{\overline{1}} + \cdots = \gamma \vec{e}_{\overline{0}} - \gamma v \vec{e}_{\overline{1}}, \tag{2.75}$$

$$\vec{e}_1 = \Lambda^{\overline{0}}{}_1 \vec{e}_{\overline{0}} + \Lambda^{\overline{1}}{}_1 \vec{e}_{\overline{1}} + \cdots = -\gamma v \vec{e}_{\overline{0}} + \gamma \vec{e}_{\overline{1}}, \tag{2.76}$$

$$\vec{e}_2 = \Lambda^{\overline{0}}{}_2 \vec{e}_{\overline{0}} + \Lambda^{\overline{1}}{}_2 \vec{e}_{\overline{1}} + \cdots = \vec{e}_{\overline{2}}, \tag{2.77}$$

$$\vec{e}_3 = \Lambda^{\overline{0}}{}_3 \vec{e}_{\overline{0}} + \Lambda^{\overline{1}}{}_3 \vec{e}_{\overline{1}} + \cdots = \vec{e}_{\overline{3}}, \tag{2.78}$$

となる。

逆変換　我々はこれまでベクトルの成分の変換則

$$A^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_\beta A^\beta, \tag{2.79}$$

および基底ベクトルの変換則

$$\vec{e}_\alpha = \Lambda^{\overline{\beta}}{}_\alpha \vec{e}_{\overline{\beta}}, \tag{2.80}$$

を手に入れた。では、これらの逆変換はどうなっているだろうか。

$\overline{\mathscr{O}}$ が $\mathscr{O}$ に対して x 方向に速度 $\boldsymbol{v}$ で動いているとき、Lorentz 変換を表す行列 $\left[\Lambda^{\overline{\beta}}{}_\alpha\right]$ は式 (2.68) で与えられた。より一般に、空間軸の向きが揃った $\mathscr{O}$ および $\overline{\mathscr{O}}$ について、$\overline{\mathscr{O}}$ が $\mathscr{O}$ に対し速度 $\boldsymbol{v}$ で動いているとき、$\left[\Lambda^{\overline{\beta}}{}_\alpha\right]$ は

$$\left[\Lambda^{\overline{\beta}}{}_\alpha\right] = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v^x & -\gamma v^y & -\gamma v^z \\ -\gamma v^x & 1 + (\gamma - 1)\frac{(v^x)^2}{v^2} & (\gamma - 1)\frac{v^x v^y}{v^2} & (\gamma - 1)\frac{v^x v^z}{v^2} \\ -\gamma v^y & (\gamma - 1)\frac{v^y v^x}{v^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{(v^y)^2}{v^2} & (\gamma - 1)\frac{v^y v^z}{v^2} \\ -\gamma v^z & (\gamma - 1)\frac{v^z v^x}{v^2} & (\gamma - 1)\frac{v^z v^y}{v^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{(v^z)^2}{v^2} \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \qquad v = \sqrt{(v^x)^2 + (v^y)^2 + (v^z)^2}, \tag{2.81}$$

となる。具体的表式は問題ではないので導出しないでよい。これの各成分を、速度 $\boldsymbol{v}$ の関数であることを強調して

$$\Lambda^{\overline{\beta}}{}_\alpha(\boldsymbol{v}), \tag{2.82}$$

と書いてみよう。繰り返しだが、速度 $\boldsymbol{v}$ は $\overline{\mathscr{O}}$ の $\mathscr{O}$ に対する速度、つまり $\Lambda^{\overline{\beta}}{}_\alpha$ の上付き添字に対応する系が下付き添字に対応する系に対して持つ速度である。添字から系の相対速度が読み取れる場合にはこの引数は冗長であるが、本小節

では強調のため明示することにする。この表式を、空間軸の揃った任意の系 $\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2$ に対する

$$\Lambda^{\mathscr{O}_2 の \beta 成分}{}_{\mathscr{O}_1 の \alpha 成分}(\mathscr{O}_2 の \mathscr{O}_1 に対する速度), \tag{2.83}$$

という表式に拡張できる。すると、例えば

$$\Lambda^{\beta}{}_{\overline{\alpha}}(-\boldsymbol{v}), \tag{2.84}$$

という表式が理解できる。これはつまり、$\overline{\mathscr{O}}$ に対し速度 $-\boldsymbol{v}$ で動く $\mathscr{O}$ に関して、$\overline{\mathscr{O}}$ で測った座標を $\mathscr{O}$ で測った座標に変換する際に現れる係数 $x^{\beta} = \Lambda^{\beta}{}_{\overline{\alpha}}(-\boldsymbol{v})x^{\overline{\alpha}}$ である。

さて、$\mathscr{O}$ とそれに対し速度 $\boldsymbol{v}$ を持つ $\overline{\mathscr{O}}$ の間に基底ベクトルの変換則

$$\vec{e}_{\alpha} = \Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}(\boldsymbol{v})\vec{e}_{\overline{\beta}}, \tag{2.85}$$

が成り立つということは、立場を逆に取って考えると、$\overline{\mathscr{O}}$ とそれに対し速度 $-\boldsymbol{v}$ を持つ $\mathscr{O}$ の間に

基底ベクトルの逆変換

$$\vec{e}_{\overline{\beta}} = \Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v})\vec{e}_{\nu}, \tag{2.86}$$

が成り立つ。これが基底ベクトルの逆変換である。ところで上の 2 式を組み合わせると

$$\vec{e}_{\alpha} = \Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}(\boldsymbol{v})\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v})\vec{e}_{\nu}, \tag{2.87}$$

が成り立つことがわかる。この式には $\mathscr{O}$ の基底ベクトルしか現れていないことに注意しよう。右辺の総和を顕に書いてみると

$$\sum_{\nu=0}^{3}\left[\sum_{\overline{\beta}=\overline{0}}^{\overline{3}}\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}(\boldsymbol{v})\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v})\right]\vec{e}_{\nu}, \tag{2.88}$$

である。α の値を 1 つ固定し、ν に関する総和に着目する。この総和の結果が左辺の $\vec{e}_{\alpha}$ を与えることを考えると、$[\cdots]$ の中は $\nu = \alpha$ のときだけ 1 で、$\nu \neq \alpha$ のときは 0 を返すことがわかる。これを Kronecker のデルタを用いて表すと

$$\sum_{\overline{\beta}=\overline{0}}^{\overline{3}}\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}(\boldsymbol{v})\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v}) = \delta^{\nu}_{\alpha}, \tag{2.89}$$

となる。総和の中身はただの数なので順番を入れ替え、また Einstein の総和の規則を用いて $\sum_{\overline{\beta}=\overline{0}}^{\overline{3}}$ を省略すると

変換と逆変換の関係

$$\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v})\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}(\boldsymbol{v}) = \delta^{\nu}_{\alpha}, \tag{2.90}$$

が得られる。これはつまり、行列 $\left[\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v})\right]$ が行列 $\left[\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\alpha}(\boldsymbol{v})\right]$ の逆行列であることを意味している。行列 $[\delta^{\nu}_{\alpha}]$ は行を ν、列を α として表示したとき単位行列であることに注意しよう。

これまでの議論から、ベクトルの成分の逆変換も導出できる。最も簡単には、上と同じ論理より $\mathscr{O}$ とそれに対し速度

$\boldsymbol{v}$ を持つ $\overline{\mathscr{O}}$ の間の変換則が

$$A^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}(\boldsymbol{v})A^{\beta}, \tag{2.91}$$

で与えられるのであれば、$\overline{\mathscr{O}}$ とそれに対し速度 $-\boldsymbol{v}$ を持つ $\mathscr{O}$ の間には

$$A^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v})A^{\overline{\beta}}, \tag{2.92}$$

が成り立つ、という導出ができる。あるいは式 (2.90) がすでにあるので、これを用いて

$$\begin{aligned} A^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}(\boldsymbol{v})A^{\beta} \quad &\overset{\text{添字の付け替え}}{\Longrightarrow} \quad A^{\overline{\beta}} = \Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\beta}(\boldsymbol{v})A^{\beta} \\ &\Longrightarrow \quad \Lambda^{\alpha}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v})A^{\overline{\beta}} = \Lambda^{\alpha}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v})\Lambda^{\overline{\beta}}{}_{\beta}(\boldsymbol{v})A^{\beta} \quad \overset{\text{式 (2.90)}}{\Longrightarrow} \quad \Lambda^{\alpha}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v})A^{\overline{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta}A^{\beta} = A^{\alpha}, \end{aligned} \tag{2.93}$$

という導出も可能である。よって

ベクトルの成分の逆変換

$$A^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\overline{\beta}}(-\boldsymbol{v})A^{\overline{\beta}}, \tag{2.94}$$

が導かれた。

第 2.0 節との対応　最後に第 2.0 節との対応を見ておくことにしよう。変換則 (2.51) および (2.90) から、

$$A^{\overline{\alpha}}\vec{e}_{\overline{\alpha}} = \vec{e}_{\overline{\alpha}}A^{\overline{\alpha}} = \left(\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\alpha}}(-\boldsymbol{v})\vec{e}_{\nu}\right)\left(\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}(\boldsymbol{v})A^{\beta}\right) = \vec{e}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\alpha}}(-\boldsymbol{v})\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}(\boldsymbol{v})A^{\beta}, \tag{2.95}$$

が得られる。ここで積の順番を入れ替えても同じことを用いている。この式の

$$\vec{e}_{\overline{\alpha}}A^{\overline{\alpha}} = \vec{e}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\alpha}}(-\boldsymbol{v})\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}(\boldsymbol{v})A^{\beta}, \tag{2.96}$$

はまさに、基底ベクトルと成分から現れる行列が逆行列の関係にある結果、ベクトル $\vec{A} = A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha} = A^{\overline{\alpha}}\vec{e}_{\overline{\alpha}}$ 自体が座標系に依らなくなっていることを示している。

行列表記で見てみよう。Lorentz 変換を表す行列は

$$\left[\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\alpha}}\right](-\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{pmatrix}, \qquad \left[\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}\right](\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix}, \tag{2.97}$$

である。基底ベクトルおよび成分の (逆) 変換

$$\vec{e}_{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\nu}{}_{\overline{\alpha}}(-\boldsymbol{v})\vec{e}_{\nu}, \qquad A^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\beta}(\boldsymbol{v})A^{\beta}, \tag{2.98}$$

を行列表記すると

$$(\vec{e}_{\overline{0}} \quad \vec{e}_{\overline{1}}) = (\vec{e}_0 \quad \vec{e}_1)\begin{pmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A^{\overline{0}} \\ A^{\overline{1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \end{pmatrix}, \tag{2.99}$$

である。これらの積であるベクトル $\vec{A} = A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha} = A^{\bar{\alpha}}\vec{e}_{\bar{\alpha}}$ は実際座標系に依らなくなっている

$$A^{\bar{0}}\vec{e}_{\bar{0}} + A^{\bar{1}}\vec{e}_{\bar{1}} = (\vec{e}_{\bar{0}} \quad \vec{e}_{\bar{1}})\begin{pmatrix} A^{\bar{0}} \\ A^{\bar{1}} \end{pmatrix} = (\vec{e}_{0} \quad \vec{e}_{1})\begin{pmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{0} \\ A^{1} \end{pmatrix} = (\vec{e}_{0} \quad \vec{e}_{1})\begin{pmatrix} A^{0} \\ A^{1} \end{pmatrix} = A^{0}\vec{e}_{0} + A^{1}\vec{e}_{1}. \tag{2.100}$$

図 19 の具体例で見てみよう。$\overline{\mathscr{O}}$ は $\mathscr{O}$ に対し x 方向に速度 $v = 0.8$ で動いているとする。Lorentz 変換を表す行列は

$$\left[\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\alpha}}\right](-\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}, \qquad \left[\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}\right](\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}, \tag{2.101}$$

であり、基底ベクトルおよび成分の (逆) 変換は

$$(\vec{e}_{\bar{0}} \quad \vec{e}_{\bar{1}}) = (\vec{e}_{0} \quad \vec{e}_{1})\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{3}\vec{e}_{0} + \frac{4}{3}\vec{e}_{1} \quad \frac{4}{3}\vec{e}_{0} + \frac{5}{3}\vec{e}_{1}\right), \qquad \begin{pmatrix} A^{\bar{0}} \\ A^{\bar{1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{0} \\ A^{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}A^{0} - \frac{4}{3}A^{1} \\ -\frac{4}{3}A^{0} + \frac{5}{3}A^{1} \end{pmatrix}, \tag{2.102}$$

である。$\vec{A}$ の例として $\mathscr{P}$ の位置ベクトル $\vec{x}$ を取ってみよう。図 19 の例では $\vec{x} \underset{\mathscr{O}}{\to} (x^{0}, x^{1}) = (3, 6)$ であるように取った。この場合上の変換則は $\vec{x} \underset{\overline{\mathscr{O}}}{\to} (x^{\bar{0}}, x^{\bar{1}}) = (-3, 6)$ を導くが、図 19 の不変双曲線を見ると確かにこれが成り立っていることがわかる。また、基底ベクトルの変換則に従って $\overline{\mathscr{O}}$ の基底ベクトルを書き込んでみると、確かに $\vec{e}_{\bar{0}}$ および $\vec{e}_{\bar{1}}$ が図 19 で $x^{\bar{0}}$ 軸および $x^{\bar{1}}$ 軸に沿った単位長さのベクトルとなっていることがわかる。

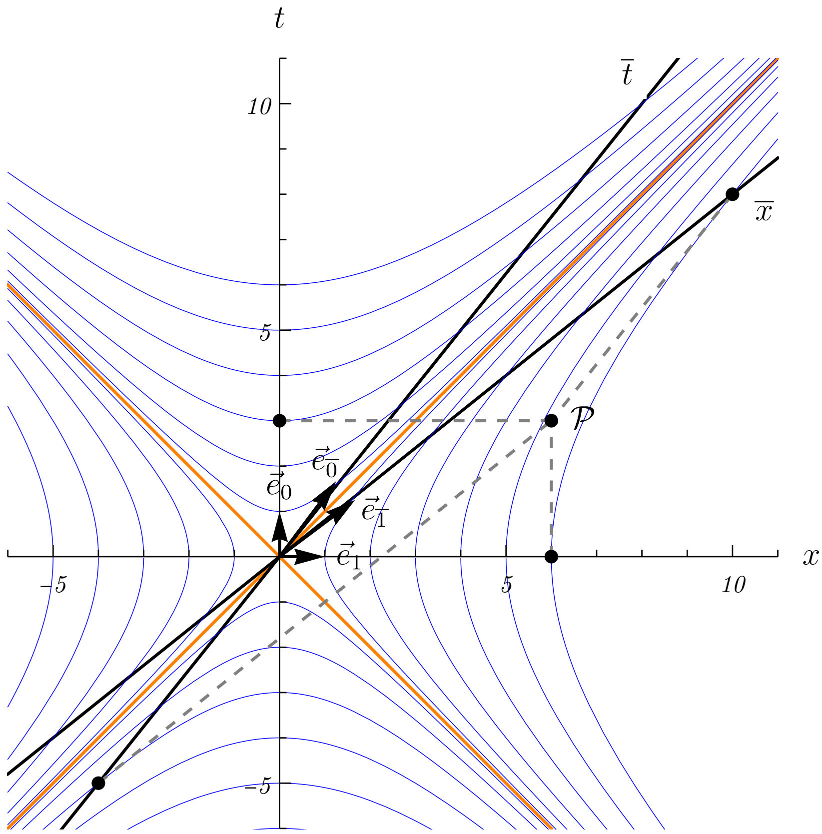


図 19: ベクトルの成分と基底の変換則の具体例。

2.3 四元速度

本小節では、相対論における重要なベクトルである四元速度を定義する。

四元速度

粒子の四元速度 $\vec{U}$ とは、その粒子の世界線に接するベクトルであり、
その粒子が瞬間的に静止している系で見た一単位の時間の長さを持ったベクトルである。

以下、詳細な説明である。まず、「その粒子の世界線に接するベクトル」について。Galileo と Newton の力学では、速度とは粒子の 3 次元中の軌道に接したベクトルであった。相対論においてはこれまで見てきたように時間と空間が混ざり合うため、速度を 4 次元の概念として、粒子の 4 次元中の世界線に接するベクトルとして定義するのは自然な拡張であろう。後で見るように、四元速度 $\vec{U}$ の空間成分は三元速度と呼ばれる粒子の通常の速度 $\boldsymbol{v}$ と関連しているため、このベクトルを四元「速度」と言う。

次に、「その粒子が瞬間的に静止している系」について。着目している粒子が加速度を受けることなく運動している場合には「その粒子の静止系」と言えば問題ないのだが、一般に加速されている粒子を考える場合、その粒子が常に静止して見える系は慣性系ではない。しかし、ある時刻だけを考えた場合、その瞬間にその粒子と同じ速度を持っているような慣性系は存在する。この慣性系における他の時刻ではもちろんその粒子が止まって見えるわけではないのだが、着目するある時刻だけならその粒子が止まって見えている。このような系を瞬間的共動座標系 (momentarily comoving reference frame) と言い、以降 MCR 系あるいは MCRF と言うことにする。MCR 系での基底ベクトル $\vec{e}_0$ を、加速されている粒子の四元速度と定義する。一般に加速されている粒子の MCR 系は、空間座標をどう取るかに依存して無限個存在するが、その違いは空間回転だけであり重要ではない。

最後に、「一単位の時間の長さを持った」について。これまで見てきたように、相対論では 2 事象の時間座標の差は系によって異なる。ここでの「一単位の時間」は「その粒子が瞬間的に静止している系で見た一単位の時間」つまり MCR 系で測った一単位の時間であることに注意しよう。

具体的表式　粒子が $\mathscr{O}$ の x 方向に速度 v で運動している。このとき、粒子の四元速度の成分はどう表されるだろうか。この粒子の静止系を $\overline{\mathscr{O}}$ として、定義から

$$\vec{U} = \vec{e}_{\overline{0}} \qquad \Longrightarrow \qquad U^{\overline{\beta}} = \delta^{\overline{\beta}}_{\overline{0}}, \tag{2.103}$$

であるから、ベクトルの成分の変換則より

$$U^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\overline{\beta}} U^{\overline{\beta}} = \Lambda^{\alpha}{}_{\overline{\beta}} \delta^{\overline{\beta}}_{\overline{0}} = \Lambda^{\alpha}{}_{\overline{0}}, \tag{2.104}$$

であり、具体的に書くと

$$U^0 = \gamma, \qquad U^1 = \gamma v, \qquad U^2 = 0, \qquad U^3 = 0, \qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{2.105}$$

である。速度 v が小さいときには $\vec{U}$ の空間成分は $(U^1, U^2, U^3) = (\gamma v, 0, 0) \simeq (v, 0, 0)$ であり、三元速度 $\boldsymbol{v}$ にほぼ等しくなるため、$\vec{U}$ は四元「速度」と呼ばれる。

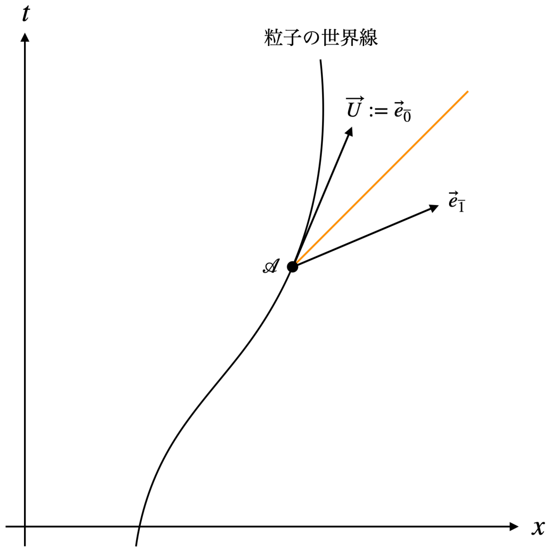


図 20: $\mathscr{A}$ における世界線の四元速度と、瞬間的共動座標系の基底ベクトル。

2.4 四元運動量

速度を 4 次元時空に一般化したので、運動量も対応して一般化するのは自然な試みである。Galileo と Newton の力学では運動量は $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ であった。その自然な拡張は

$$\vec{p} = m\vec{U}, \tag{2.106}$$

であろう。この $\vec{p}$ を**四元運動量**と言う。四元運動量の成分

$$\vec{p} \underset{\mathscr{O}}{\longrightarrow} (p^0, p^1, p^2, p^3), \tag{2.107}$$

のうち、第 0 成分 p^0 は慣用的にエネルギー E と呼ばれ、

$$\vec{p} \underset{\mathscr{O}}{\longrightarrow} (E, p^1, p^2, p^3), \tag{2.108}$$

と書くことも多い。

具体的表式　前小節で取り扱った粒子が質量 m を持つとする。このとき四元運動量はどう表されるだろうか。前小節の計算からこの粒子の四元速度は

$$U^\alpha = \Lambda^\alpha{}_{\bar{0}}, \tag{2.109}$$

$$U^0 = \gamma, \qquad U^1 = \gamma v, \qquad U^2 = 0, \qquad U^3 = 0, \qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{2.110}$$

であるから、四元運動量は

$$p^\alpha = m\Lambda^\alpha{}_{\bar{0}}, \tag{2.111}$$

$$E := p^0 = m\gamma, \qquad p^1 = m\gamma v, \qquad p^2 = 0, \qquad p^3 = 0, \qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{2.112}$$

となる。この p^0 がエネルギーと呼ばれる理由は、速度 v が小さいとき近似的に

$$E := p^0 = m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m\left(1 + \frac{1}{2}v^2 + \cdots\right) \simeq m + \frac{1}{2}mv^2, \tag{2.113}$$

となり、Galileo と Newton の力学における運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ が現れるためである。エネルギー E は運動エネルギーだけではなく、質量 m と運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ の和になっていることに注意しよう。また、四元速度 $\vec{U}$ の空間成分は速度 v が小さいとき近似的に三元速度 $\boldsymbol{v}$ になることから、四元運動量の空間成分も近似的に三元運動量 $\boldsymbol{p}$ になることがわかる。

四元運動量の保存　Galileo と Newton の力学では、粒子の相互作用はエネルギー保存則と運動量保存則に従っていた。相対論におけるベクトル $\vec{p}$ の成分は、非相対論的極限 $|v| \ll 1$ で Galileo と Newton の力学におけるエネルギーと運動量に移行することを先に確認した。ここから、**相対論における保存則が四元運動量 $\vec{p}$ の保存であると仮定する**のは自然な推測である。すなわち、複数の粒子が相互作用をするとき、

$$\vec{p} := \sum_{\text{粒子 } i} \vec{p}_{(i)}, \tag{2.114}$$

が相互作用の前後で変化しないという仮定である。ここで $\vec{p}_{(i)}$ は粒子 i の四元運動量で、和は相互作用に関与する全ての粒子に対して取られる。この仮定は、本講義の初めに導入した特殊相対性原理および光速度不変の原理に加わる第三の仮定となる。

四元運動量の保存則から導かれる結論の一つは、エネルギー保存則を考える際には静止質量 m を含めて扱わなければならないということである。つまり、静止質量が減少するような過程があるならば、その減少分は莫大な運動エネルギーに転換されることを意味している。

四元運動量の保存則において、相互作用の「前後」という言葉を用いたが、「前」あるいは「後」という概念は観測者に依存する。そのため、全四元運動量 $\vec{p}$ において $\vec{p}_{(i)}$ の和を取る際、時間座標 t が一定で考えるべきか、あるいは $\bar{t}$ が一定で考えるべきかという疑問が生じる。しかし四元運動量の保存則が成り立つ限り、この不定性は問題にならない (図 21)。いかなる観測者も、自分にとって時刻一定の線 (正確には、4 次元時空中の時刻一定の 3 次元空間であり、超曲面と呼ばれる) を定義し、その時刻に全ての四元運動量を足し合わせれば、他の観測者と同じベクトルが得られることになる。

ゼロ運動量系 = 重心系　慣性系のうち、全四元運動量の和の空間成分が 0 となる系

$$\sum_{\text{粒子 } i} \vec{p}_{(i)} \underset{\mathcal{O}}{\to} (E_{\text{total}}, 0, 0, 0), \tag{2.115}$$

をゼロ運動量系 (= 重心系 = center of mass frame) と呼ぶ。瞬間的共動座標系の場合と同様、空間回転の自由度に伴いゼロ運動量系は無限に存在する。

2.5 スカラー積

ベクトルの大きさ　間隔 (= 固有距離 = 距離) の定義と同様に、任意の系 $\mathcal{O}$ においてベクトル $\vec{A}$ の大きさを

ベクトルの大きさ

$$\vec{A}^2 := -(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2, \tag{2.116}$$

と定義する。右辺は系 $\mathcal{O}$ における成分なので系の選択に依存するように見えるが、ベクトルは定義上 Lorentz 変換により座標 (x^0, x^1, x^2, x^3) および変位ベクトル $(\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3)$ と同じ変換をすると定義したので、距離が Lorentz 変換

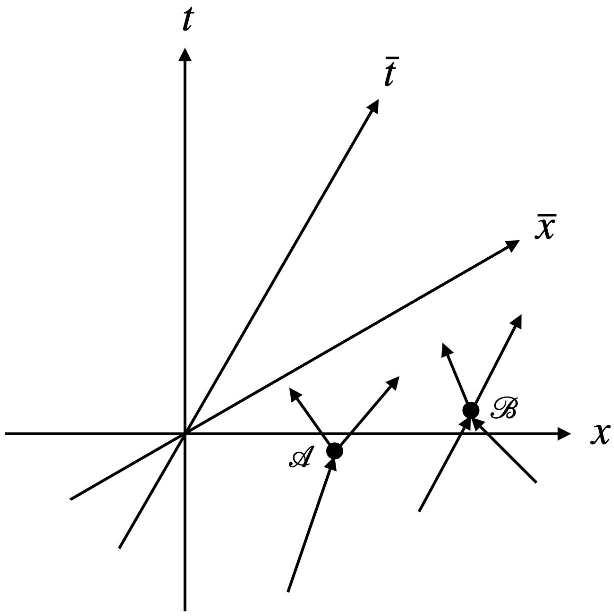


図 21: ある時刻においてどの四元運動量が全四元運動量に寄与するかは座標系に依存するが、四元運動量の保存則が成り立つ限り、全四元運動量はどの系から見ても同じ四元ベクトルとなる。

で不変であることから、ベクトル $\vec{A}$ の大きさも Lorentz 変換で不変であること

$$-(A^0)^2+(A^1)^2+(A^2)^2+(A^3)^2=-(A^{\bar{0}})^2+(A^{\bar{1}})^2+(A^{\bar{2}})^2+(A^{\bar{3}})^2, \tag{2.117}$$

がすでに保証されている。つまりベクトル $\vec{A}$ の大きさは系によらない。別の言い方をすると、**ベクトル $\vec{A}$ の大きさはスカラーである**。さて、大きさという言葉を用いたが、$\vec{A}^2$ の値は必ずしも正とは限らない。大きさの正負に応じてベクトルは次のように分類される。

- $\vec{A}^2>0$: 空間的ベクトル
- $\vec{A}^2<0$: 時間的ベクトル
- $\vec{A}^2=0$: ヌルベクトル

スカラー積　2 つの一般に異なるベクトルの間に、スカラー積と呼ばれる量を導入する。任意の系 $\mathscr{O}$ においてスカラー積を

スカラー積

$$\vec{A}\cdot\vec{B}:=-A^0B^0+A^1B^1+A^2B^2+A^3B^3, \tag{2.118}$$

と定義する。定義上、$\vec{A}=\vec{B}$ の場合はスカラー積はベクトルの大きさと一致する。スカラー積の場合と同様、右辺は系 $\mathscr{O}$ における成分なので系の選択に依存するように見えるが、実はこの量は全ての系で同じ値を取る。証明は以下の通りである。ベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の和の大きさ $(\vec{A}+\vec{B})^2$ を考えよう。定義 (2.116) および (2.118) から、この量はスカラー積 $(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})$ と等しい

$$(\vec{A}+\vec{B})^2=(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B}). \tag{2.119}$$

この右辺は、定義 (2.118) に代入すると以下のように分解できる

$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{A}+\vec{B}\cdot\vec{B}+2\vec{A}\cdot\vec{B}. \tag{2.120}$$

定義 (2.116) および (2.118) から、右辺の第 1,2 項目はベクトル $\vec{A}$ および $\vec{B}$ の大きさである

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = \vec{A}^2, \qquad \vec{B}\cdot\vec{B} = \vec{B}^2. \tag{2.121}$$

以上を整理すると、

$$(\vec{A}+\vec{B})^2 - \vec{A}^2 - \vec{B}^2 = 2\vec{A}\cdot\vec{B}, \tag{2.122}$$

を得る。さて、上式の左辺は全てベクトルの大きさであるから値は系に依らない。よって右辺の値も系に依らず、従ってスカラー積の値は系に依らない。

スカラー積が $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$ であるとき、2 つのベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ は**直交している**と言う。スカラー積の定義にはマイナス符号があるので、**2 つの直交するベクトルは必ずしも時空図で直角をなしているとは限らない**。例えばヌルベクトル

$$\vec{A} \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (1,1,0,0), \tag{2.123}$$

を考えると、$\vec{A}\cdot\vec{A}=0$ であるから、$\vec{A}$ は $\vec{A}$ 自身に直交している。一般にヌルベクトルは定義上 $\vec{A}^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} = 0$ であるから自身に直交していることがわかる。

基底ベクトルのスカラー積　系 $\mathscr{O}$ の基底ベクトル $\{\vec{e}_\alpha\}$ を考えよう。これらを成分表示すると

$$\vec{e}_0 \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (1,0,0,0), \qquad \vec{e}_1 \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (0,1,0,0), \qquad \vec{e}_2 \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (0,0,1,0), \qquad \vec{e}_3 \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (0,0,0,1), \tag{2.124}$$

であるから、上の定義に代入して

$$\vec{e}_0\cdot\vec{e}_0 = -1, \qquad \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 = \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 = +1, \qquad \vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta = 0 \quad (\alpha\neq\beta), \tag{2.125}$$

であることがわかる。この関係をまとめて

$$\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta}, \tag{2.126}$$

と書こう。改めて書くと

$$\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} -1 & (\alpha=\beta=0) \\ +1 & (\alpha=\beta=1 \text{ or } \alpha=\beta=2 \text{ or } \alpha=\beta=3) \\ 0 & (\alpha\neq\beta) \end{cases} \tag{2.127}$$

である。$\eta_{\alpha\beta}$ は Kronecker のデルタ δ^α_β と似ているが、混同しないように注意しよう。上の式から、基底ベクトル $\{\vec{e}_\alpha\}$ は正規直交な 4 つ組、つまりそれぞれが単位大きさに規格化され (= 正規) 互いに直交している 4 つ組であることがわかる。ここで一般に、時間的ベクトルについては大きさが −1 であるときに単位大きさであると見なす。今の場合、時間方向の基底ベクトル $\vec{e}_0$ は大きさが $\vec{e}_0^{\,2} = \vec{e}_0\cdot\vec{e}_0 = -1$ であるため単位大きさである。

さて、系 $\overline{\mathscr{O}}$ の基底ベクトルも同様に考えてみると

$$\vec{e}_{\bar{0}} \underset{\overline{\mathscr{O}}}{\rightarrow} (1,0,0,0), \qquad \vec{e}_{\bar{1}} \underset{\overline{\mathscr{O}}}{\rightarrow} (0,1,0,0), \qquad \vec{e}_{\bar{2}} \underset{\overline{\mathscr{O}}}{\rightarrow} (0,0,1,0), \qquad \vec{e}_{\bar{3}} \underset{\overline{\mathscr{O}}}{\rightarrow} (0,0,0,1), \tag{2.128}$$

であるから、同様にして

$$\vec{e}_{\bar{\alpha}} \cdot \vec{e}_{\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}, \tag{2.129}$$

となることがわかる。特に $\vec{e}_{\bar{0}} \cdot \vec{e}_{\bar{1}} = 0$ であるが、この関係を $\mathcal{O}$ の図 22 の時空図に描いてみると、時空図において直角をなしていないにもかかわらず、スカラー積が 0 であるために定義上直交していることがわかる。このような時間的ベクトルと空間的ベクトルの 2 つが直交しているかどうかは光の世界線とのなす角が等しいかどうかで判定でき、なす角が等しい場合は直交していることがわかる。

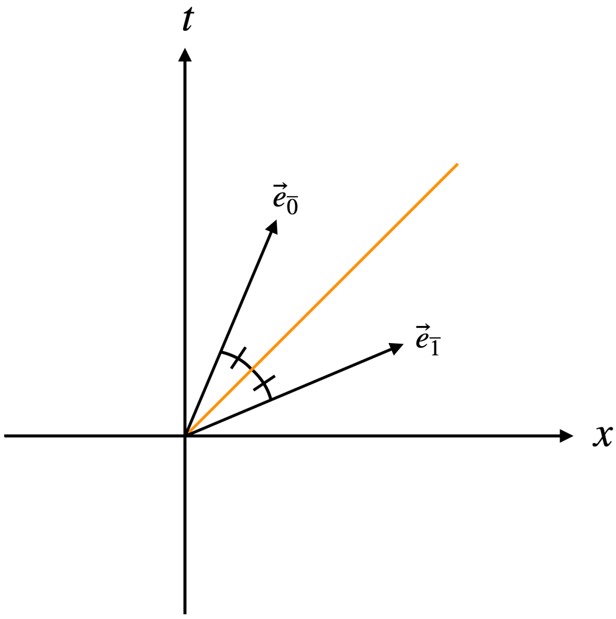


図 22: 直交する 2 つのベクトル $\vec{e}_{\bar{0}}$ および $\vec{e}_{\bar{1}}$。これらは時空図上で直角をなさないが、$\vec{e}_{\bar{0}} \cdot \vec{e}_{\bar{1}} = 0$ であるため定義上直交している。

粒子の四元速度の大きさ　粒子の四元速度は定義上 MCR 系での時間方向の基底ベクトルであるから、MCR 系で値を評価することにより

粒子の四元速度の大きさ

$$\vec{U} \cdot \vec{U} = -1, \tag{2.130}$$

となる。上の議論からベクトルの大きさあるいはスカラー積は系に依存しないため、他の系で評価しても四元速度の大きさは -1 であることに注意しよう。

2.6 応用

微分としての四元速度　粒子が無限小の変位 $d\vec{x}$ をしたとし、その系 $\mathcal{O}$ での成分を $d\vec{x} \underset{\mathcal{O}}{\to} (dt, dx, dy, dz)$ とする。この変位の大きさは、ベクトルの大きさを一般的に与える式 (2.116) より

$$d\vec{x}^2 = -(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2, \tag{2.131}$$

であるが、一方で距離も式 (1.8) の定義上

$$ds^2 = -(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2, \tag{2.132}$$

であった。すなわち

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x}, \tag{2.133}$$

である。また、粒子の世界線は時間的ベクトルであることから、この無限小の変位の間の固有時間 (1.50) を考えることができ、それは

$$ds^2 = -d\tau^2, \tag{2.134}$$

を満たすことを式 (1.51) で見た。よって

$$d\tau^2 = -d\vec{x} \cdot d\vec{x}, \tag{2.135}$$

が成り立っている。

さて、ここでベクトル $\frac{d\vec{x}}{d\tau}$ を考える。この量がベクトルであることは、変位 $d\vec{x}$ がベクトルであることと固有時間 $d\tau$ が系に依らないことから従う。このベクトルは、式 (2.135) より直ちに

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\vec{x} \cdot d\vec{x}}{d\tau^2} = -1, \tag{2.136}$$

を満たすため、世界線に接する単位大きさの時間的ベクトルであることがわかる。ここで時間的ベクトルについては大きさが −1 のとき単位大きさと見なすことを思い出そう。ベクトル $\frac{d\vec{x}}{d\tau}$ を MCR 系で成分表示すると、MCR 系では定義上ベクトル $d\vec{x}$ の空間成分はゼロとなっており、また時間成分は固有時間 $d\tau$ に一致することが固有時間の定義から従うため、

$$d\vec{x} \underset{\mathrm{MCRF}}{\longrightarrow} (d\tau, 0, 0, 0), \tag{2.137}$$

すなわち

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} \underset{\mathrm{MCRF}}{\longrightarrow} (1, 0, 0, 0), \tag{2.138}$$

であることがわかる。これはベクトル $\frac{d\vec{x}}{d\tau}$ が MCR 系での時間方向の基底ベクトルに一致すること

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = (\vec{e}_0)_{\mathrm{MCRF}}, \tag{2.139}$$

を意味している[8]。右辺はまさに四元速度の定義であるため、

微分としての四元速度

$$\vec{U} = \frac{d\vec{x}}{d\tau}, \tag{2.141}$$

が導かれた。

---

[8] 添字は本来 MCR 系での時間方向であると明示するため 0_{MCRF} などと書くべきであるが、そうすると

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \vec{e}_{0_{\mathrm{MCRF}}}, \tag{2.140}$$

となって読みにくくなるためこのように書いている。

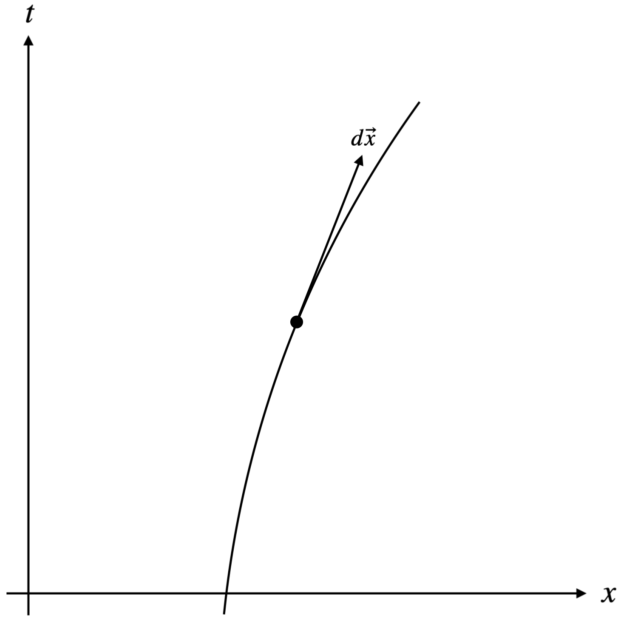


図 23: 粒子の世界線に接する微小変位ベクトル $d\vec{x}$。

<u>**微分としての四元加速度**</u>　次に、四元加速度と言うべき量があるか調べてみる。最も自然な候補は

$$\frac{d\vec{U}}{d\tau} = \frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2}, \tag{2.142}$$

である。厳密に言うと今まで 2 事象の間の変位 $d\vec{x}$ を考えていたが、それでは 2 階微分 $\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2}$ を取ることはできない。これが気になる人は図 24 のように 3 事象を取り、事象 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 間で上の手続きに従って四元速度を求め、同様に事象 $\mathscr{B}\mathscr{C}$ 間で四元速度を求めた後、その四元速度の差を $\mathscr{A}\mathscr{B}$ の中点と $\mathscr{B}\mathscr{C}$ の中点の間の固有時間で割る、という手続きで理解しよう。この手続きにおいて事象 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ を限りなく近付けたものが、事象 $\mathscr{B}$ における 2 階微分 $d^2\vec{x}/d\tau^2$ に相当する。さて、式 (2.141) を微分すると

$$\frac{d}{d\tau}(\vec{U}\cdot\vec{U}) = 2\vec{U}\cdot\frac{d\vec{U}}{d\tau}, \tag{2.143}$$

を得る。ここで $\frac{d}{d\tau}(\vec{U}\cdot\vec{U}) = \frac{d\vec{U}}{d\tau}\cdot\vec{U} + \vec{U}\cdot\frac{d\vec{U}}{d\tau}$ であるが、1 項目が 2 項目に等しいことがスカラー積 (2.118) からわかるため上のように書くことができる。さて、左辺の $\frac{d}{d\tau}(\vec{U}\cdot\vec{U})$ の微分の中身は $\vec{U}\cdot\vec{U} = -1$ で定数であるから左辺はゼロであり、従って

$$\vec{U}\cdot\frac{d\vec{U}}{d\tau} = 0, \tag{2.144}$$

を得る。MCR 系では $\vec{U}$ には第 0 成分しかないので、直交性から

$$\frac{d\vec{U}}{d\tau} \underset{\text{MCRF}}{\rightarrow} (0, a^1, a^2, a^3), \tag{2.145}$$

が従う。このベクトル $\frac{d\vec{U}}{d\tau}$ を**四元加速度**ベクトル $\vec{a}$ と定義する。

微分としての四元加速度

$$\vec{a} := \frac{d\vec{U}}{d\tau} = \frac{d^2\vec{U}}{d\tau^2}. \tag{2.146}$$

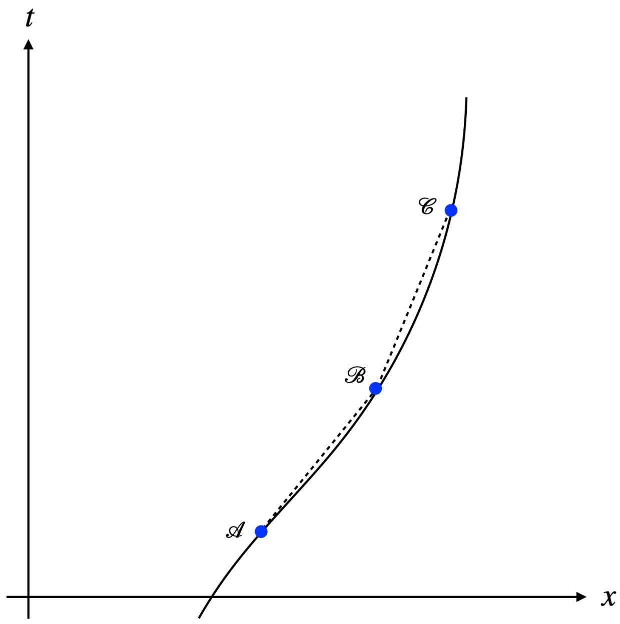


図 24: 四元加速度の計算手続き。事象 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 間で四元速度を求め、同様に事象 $\mathscr{B}\mathscr{C}$ 間で四元速度を求めた後、その四元速度の差を $\mathscr{A}\mathscr{B}$ の中点と $\mathscr{B}\mathscr{C}$ の中点の間の固有時間で割った量を考える。事象 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$ を限りなく近付けたとき、この量が事象 $\mathscr{B}$ における 2 階微分 $d^2\vec{x}/d\tau^2$ である。

エネルギーと運動量　運動量 $\vec{p}$ の粒子を考える。

$$\vec{p}\cdot\vec{p} = m^2\vec{U}\cdot\vec{U} = -m^2, \tag{2.147}$$

である。一方

$$\vec{p}\cdot\vec{p} = -E^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2, \tag{2.148}$$

であるから、粒子のエネルギーを運動量および質量で表す式

エネルギーと運動量および質量の関係

$$E^2 = m^2 + \sum_{i=1}^{3}(p^i)^2, \tag{2.149}$$

が従う。

観測者 $\overline{\mathscr{O}}$ が、粒子の四元速度とは必ずしも一致しない四元速度 $\vec{U}_{\overline{\mathscr{O}}}$ で運動しているとする。一般に観測者の四元速度は観測者の時間方向の基底ベクトルであるから、$\vec{U}_{\overline{\mathscr{O}}} = \vec{e}_{\bar{0}}$ であり、

$$\vec{p}\cdot\vec{U}_{\overline{\mathscr{O}}} = \vec{p}\cdot\vec{e}_{\bar{0}}, \tag{2.150}$$

となる。この系での四元運動量の成分を

$$\vec{p} \underset{\overline{\mathscr{O}}}{\longrightarrow} (\overline{E}, p^{\bar{1}}, p^{\bar{2}}, p^{\bar{3}}), \tag{2.151}$$

とすると[9]、右辺に代入して

$$\overline{E} = -\vec{p}\cdot\vec{U}_{\overline{\mathscr{O}}}, \tag{2.152}$$

を得る。これはつまり、任意の観測者が観測する粒子のエネルギーは、スカラー積 $-\vec{p}\cdot\vec{U}_{\overline{\mathscr{O}}}$ を計算することにより求まることを意味している。

2.7 光子

これまで時間的な世界線を描く粒子を考察してきた。ここではヌルの世界線上を動く光子について考察する。

光子には四元速度が存在しない　光子の四元速度が存在するか考えるため、光子の軌道に沿った 2 事象間の変位ベクトル $d\vec{x}$ を考える。光子はヌルの世界線上を運動するから、

$$ds^2 = d\vec{x}\cdot d\vec{x} = 0, \tag{2.153}$$

である。固有時間 $d\tau$ は距離と $d\tau^2 = -ds^2$ の関係があったことを思い出すと、$d\tau$ は (当初の定義を拡張してヌル的に離れた 2 事象間に拡張しようとしても)

$$d\tau = 0, \tag{2.154}$$

となる。よって、時間的な世界線を描く粒子に対して行ったような、変位ベクトル $d\vec{x}$ を単位大きさに規格化することで四元速度を求める方法

$$\vec{U} = \frac{d\vec{x}}{d\tau}, \tag{2.155}$$

は光子に対しては適用できず、したがって光子に対しては四元速度 $\vec{U}$ を定義できない。

この事実を別の見方で見てみよう。あらゆる系での (単位大きさに規格化された) $\vec{e}_0$ の集合を考える。このベクトルたちは定義上、あらゆる可能な四元速度の集合である。このベクトルたちのうち、光子の世界線に接するものはあるだろうか？答えは否である。なぜなら、もしそのようなベクトルが存在したとすると、それは光が静止して見えるような MCR 系での時間軸に沿ったベクトルだが、特殊相対論の原理の一つである光速度不変の原理より、光が静止して見えるような MCR 系はそもそも存在しないからである。したがって、上述の $\vec{e}_0$ の集合の中に光子の四元速度になり得るベクトルは存在しない。

光子の四元運動量　光子には四元速度 $\vec{U}$ が存在しないことがわかった。ということは、四元速度に質量を掛けて四元運動量 $\vec{p} = m\vec{U}$ を構成する方法は光子に対しては適用できない。これでは、全四元運動量

$$\sum_{\text{粒子 } i} \vec{p}_{(i)}, \tag{2.156}$$

の保存が光子の存在する系に対して適用できなくなってしまう。

この問題は、「まず四元速度 $\vec{U}$ を定義し、次に質量を掛けて四元運動量 $\vec{p} = m\vec{U}$ を構成する」という手続きを取らないことで回避できる。つまり、光子に対しては四元速度は存在しないが、全粒子の四元運動量の保存則を成り立たせるような光子の四元運動量 $\vec{p}$ が存在するはずであると推測し、その第 0 成分をその光子のエネルギー $p^0 = E$ と呼ぶ。四元運

[9] これまでの記法だと $\overline{E}$ は本来 $p^{\overline{0}}$ と書いて系 $\overline{\mathscr{O}}$ での成分であることは添字で示していたが、第 0 成分を E と書く記法には添字がないため、仕方なく $\overline{E}$ と書くことにする。

動量は一般に世界線に平行なので、光子の四元運動量はヌルの世界線に平行であり、光子が x 方向に動いている場合は

$$p^1 = E, \qquad p^2 = p^3 = 0, \tag{2.157}$$

となる。実際、

$$\vec{p}^2 = -(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = -E^2 + E^2 = 0, \tag{2.158}$$

であるから、確かに $\vec{p}$ はヌルベクトルである。ここから、光子の三元運動量 (空間的運動量) の大きさはエネルギーに等しいことがわかる。

本講義では詳しく取り扱わないが、量子力学によると波としての光 (電磁波) は実は粒子としての光 (光子) の集まりと見なすことができ、波としての光の振動数 ν と粒子としての光のエネルギーには関係

$$E = h\nu, \tag{2.159}$$

がある。ここで $h = 6.6256 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$ は Planck 定数と呼ばれる定数である。我々は粒子としての光子に対するローレンツ変換を知っているので、上記の関係式を使うことで、波としての光の振動数の変換式すなわち Doppler 偏移の式が得られる。例えば、系 $\mathcal{O}$ での振動数 ν であるような光が x 方向に運動しているとする。このとき、系 $\mathcal{O}$ に対して x 方向に v の速度で運動する系 $\overline{\mathcal{O}}$ での光子のエネルギーは

$$\overline{E} = \gamma E - \gamma v p^1, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \tag{2.160}$$

であるから、光の振動数の関係式は

$$h\overline{\nu} = \gamma h\nu - \gamma v h\nu \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\overline{\nu}}{\nu} = \gamma - \gamma v = \sqrt{\frac{1 - v}{1 + v}}, \tag{2.161}$$

となる。

光子は静止質量ゼロの粒子である　光子の静止質量はゼロであることを見よう。光子が静止して見えるような MCR 系は存在しないのに「静止」質量と呼ぶのは変な気がするが、「静止質量」という単語で単に m^2 を指していると思えばよい。そして実際、エネルギーと質量および運動量の関係 (2.149) を書き換えた式

$$m^2 = -\vec{p}^2 \tag{2.162}$$

と、光子の四元運動量がヌルベクトルであること

$$\vec{p}^2 = 0, \tag{2.163}$$

から

$$m^2 = 0, \tag{2.164}$$

が従う。光子に限らず四元運動量がヌルベクトルであるような粒子は、上記の議論により全て静止質量がゼロであることが言える。光子以外に静止質量がゼロである可能性のある粒子は、ニュートリノのうち最も軽い 1 種類と[10]、重力子である。重力子とは我々が波として観測している重力波を量子力学的に取り扱うと現れる粒子のことであるが、重力波 (およびそれを含む重力全体) を量子力学で記述して整合的な理論が得られるかはまだわかっていないので、重力子の概

[10] この点は [1] の記述が誤りである。

念は確立しているとは言えない。一方、ニュートリノのうち最も軽い 1 種類についても、静止質量がゼロであるかはわかっていない。

　最後に、静止質量ゼロの粒子だけが光速で伝播することを確認しよう。静止質量がゼロの粒子は、x 方向に運動しているとすると

$$\frac{p^1}{p^0} = 1, \tag{2.165}$$

であるのに対し、静止質量がゼロでない粒子は、どんなにエネルギー $E = p^0$ を上げたとしても

$$\vec{p}^2 = -m^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{p^1}{p^0} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{(p^0)^2}} < 1, \tag{2.166}$$

となり、世界線の傾きは 1 より小さいままである。ここには定性的な違いがある。静止質量 $m \neq 0$ の粒子に対してはその粒子が静止した MCR 系が存在するのに対し、静止質量 $m = 0$ の粒子に対しては MCR 系が存在しない。

3. テンソル解析

本節では特殊相対論におけるテンソル解析について学ぶ。その際に現れる新しい概念である「双対ベクトル空間」について、まず第 2 節と同様の 2 次元の例を用いて理解しよう。

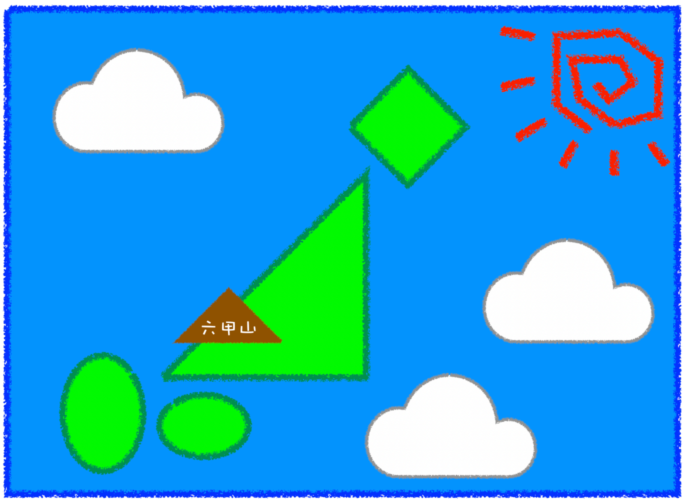


図 25: 神戸の登山。

3.0 天気予報 (再)

第 2.0 節においてスカラー・ベクトル・テンソルの違いを見た。復習すると

スカラー・ベクトル・テンソル

座標変換に対し

- スカラー : 値が変わらない (例 : 気温 T)
- ベクトル : 成分が座標と同じように変換する (例 : 風 $\vec{v}$)
- テンソル : 成分がベクトルの変換性を多重に持つ (例 : 地盤にかかる応力 σ)

である。この中で最も重要な概念はベクトルである。ベクトルさえわかってしまえば、テンソルはその変換性が多重になっているだけなので実は大した違いはない[11]。さて、本節で学ぶ重要な概念は「双対ベクトル空間」である。

双対ベクトル空間

ベクトル空間を考えると、それに**双対**な別のベクトル空間が自然と存在する。

これを第 2 節と同様の 2 次元の例を用いて理解しよう。ただし以下では天気予報ではなく登山を考える。

双対ベクトル空間　六甲道を原点に取った、2 次元の位置ベクトルの空間を考えよう。図 26 の底面がこの 2 次元である。3 次元的な図になっているが、考えているベクトル空間は底面に示されている 2 次元である。第 2 節と同様、座標系 $\mathscr{O}$

[11] ここでテンソルとして出している例は、以下の分類では $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ テンソルである。この分類については後ほど学ぶ。

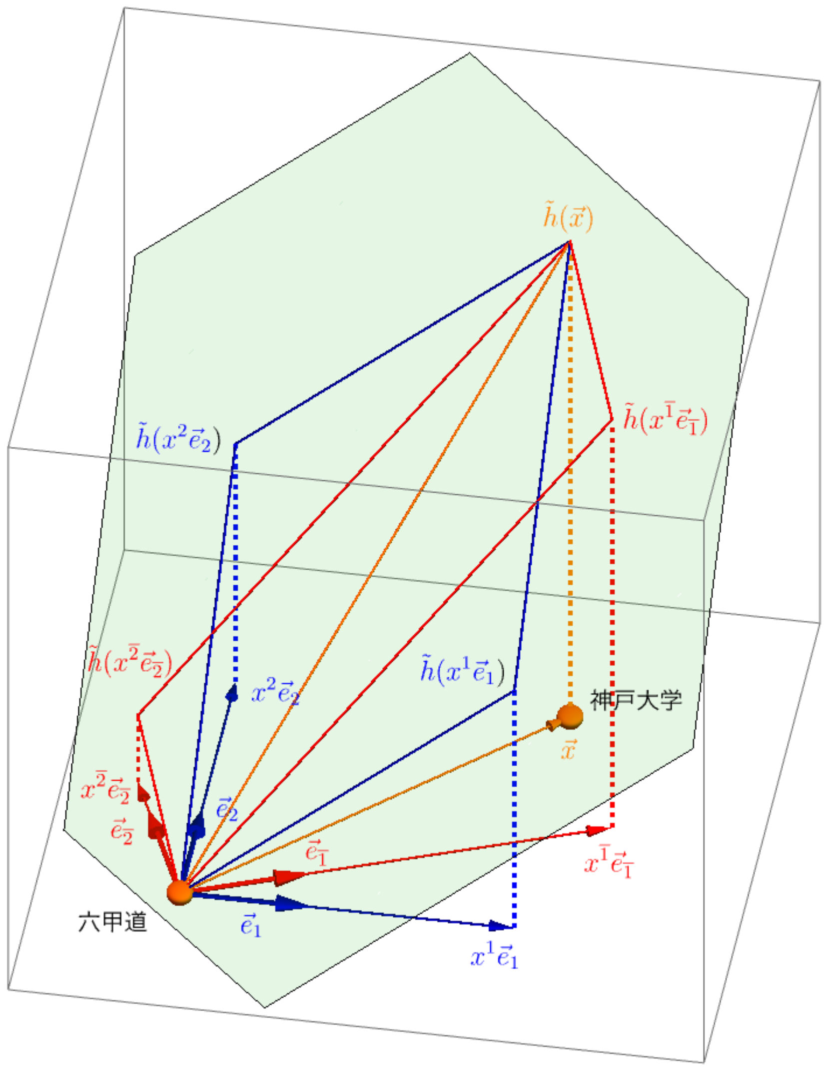


図 26: 六甲道から神戸大学までの登山。

の基底 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ および座標系 $\overline{\mathcal{O}}$ の基底 $\left\{\vec{e}_{\bar{1}}, \vec{e}_{\bar{2}}\right\}$ が示してある。以前に強調した通り、ベクトルは座標系とは関係なく存在する。図 26 でも例えば神戸大学は座標系と関係なく存在し、あくまでその位置ベクトルの成分が座標系の選択に応じて変化する。

さて、このベクトル空間の任意の元 $\vec{x}$ を引数として実数値を返すような任意の関数を考えよう。そのような関数の一例は、$\vec{x}$ の地点の原点から測った標高を返す関数

$$h(\vec{x}) = (\text{原点から測った位置}\vec{x}\text{の標高}), \tag{3.1}$$

である。関数 h はベクトル $\vec{x}$ を入れると実数が返ってくる箱のようなものと考えるとわかりやすいかもしれない。このような関数のうち、線形性を持ったもの $\tilde{p}$ だけを考える。線形性を持つということは、原点である六甲道周りから、x^1, x^2 方向にそれぞれ傾き $\left.\frac{\partial h}{\partial x^1}\right|_{六甲道}$, $\left.\frac{\partial h}{\partial x^2}\right|_{六甲道}$ の全く凹凸のない斜面が広がっているような地形だけを考えることに相当する。例えば一変数関数 $f(x)$ の場合、線形であれば原点の傾きだけで関数が表せるから、

$$f(x) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} \times x, \tag{3.2}$$

である。同様に、今考えている関数は

$$\tilde{p}(\vec{x}) = \left.\frac{\partial h}{\partial x^i}\right|_{\text{六甲道}} x^i \ (= \tilde{\mathrm{d}}h(\vec{x})), \tag{3.3}$$

である。ここで $\tilde{\mathrm{d}}h$ は原点である六甲道付近の**勾配**と呼ばれるが、この記法については後ほど学ぶので今は理解できなくてもよい。このような関数は実際、線形性を満たしている。つまり

- 引数を定数 c 倍して $\tilde{p}$ に入れたものは、引数が c 倍される前の $\tilde{p}$ の値の c 倍である

$$\tilde{p}(c\vec{x}) = c\tilde{p}(\vec{x}), \tag{3.4}$$

- 2 つのベクトルを足してから $\tilde{p}$ に入れたものは、各々を $\tilde{p}$ に入れてから足したものと同じである

$$\tilde{p}(\vec{x}+\vec{y}) = \tilde{p}(\vec{x}) + \tilde{p}(\vec{y}), \tag{3.5}$$

という性質を満たしている。実際、図 26 で位置ベクトルを定数倍すると標高が定数倍され、2 つの位置ベクトルを足した地点の標高はそれぞれの位置ベクトルの地点の標高の和になっていることを確認しよう。さて、このような関数には「和」と「定数倍」

$$\tilde{s} = \tilde{p} + \tilde{q}, \tag{3.6}$$

$$\tilde{r} = c\tilde{p}, \tag{3.7}$$

が自然に定義できる。つまり、$\tilde{p}$ と $\tilde{q}$ が「足された」関数 $\tilde{s}$ というのは任意のベクトル $\vec{x}$ を入れたときに $\tilde{p}(\vec{x}) + \tilde{q}(\vec{x})$ を返すような関数

$$\tilde{s}(\vec{x}) = \tilde{p}(\vec{x}) + \tilde{q}(\vec{x}), \tag{3.8}$$

として定義できるし、$\tilde{p}$ を「定数 c 倍した」関数というのは任意のベクトル $\vec{x}$ を入れたときに $c\tilde{p}(\vec{x})$ を返すような関数

$$\tilde{r}(\vec{x}) = c\tilde{p}(\vec{x}), \tag{3.9}$$

として定義できる。図 27–28 に示した通り、これは標高の例で言うと、「定数倍」を標高の定数倍として定義し、「和」を標高の足し算として定義していることに相当する。

驚くべきことに、このような関数たちはベクトル空間を構成している。つまりベクトル空間の公理

- 加法の結合律：$\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$,
- 加法の可換律：$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$,
- 加法単位元の存在：ある $\boldsymbol{0}$ が存在し、任意の $\boldsymbol{v}$ に対し $\boldsymbol{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$,
- 加法逆元の存在：任意の $\boldsymbol{v}$ に対しある $-\boldsymbol{v}$ が存在し、$\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$,
- 分配律：$a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$ および $(a+b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v}$,
- 両立条件：$a(b\boldsymbol{v}) = (ab)\boldsymbol{v}$,
- スカラー乗法の単位元：$1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$,

を、元のベクトル $\vec{x}$ たちだけでなく、関数 $\tilde{p}$ たちが満たしているのである。例えば結合律 $\tilde{p} + (\tilde{q} + \tilde{r}) = (\tilde{p} + \tilde{q}) + \tilde{r}$ の左辺は「任意の $\vec{x}$ に対し $\tilde{p}(\vec{x}) + (\tilde{q} + \tilde{r})(\vec{x})$ を返す関数、ただし $(\tilde{q} + \tilde{r})(\vec{x})$ は $\tilde{q}(\vec{x}) + \tilde{r}(\vec{x})$ のこと」なのでつまり「任意の $\vec{x}$ に対し

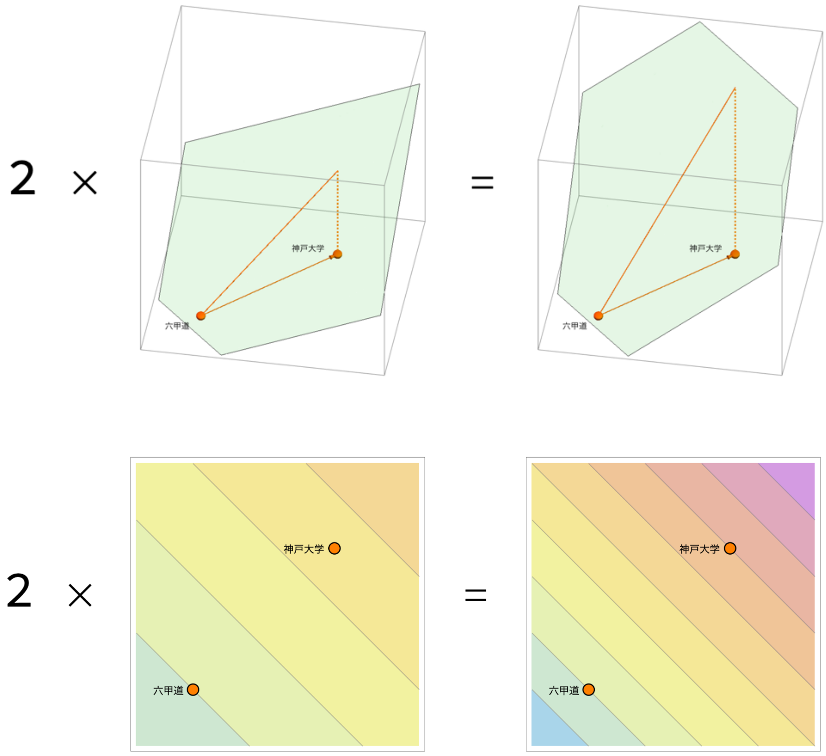


図 27: 双対ベクトル空間のベクトルの定数倍。

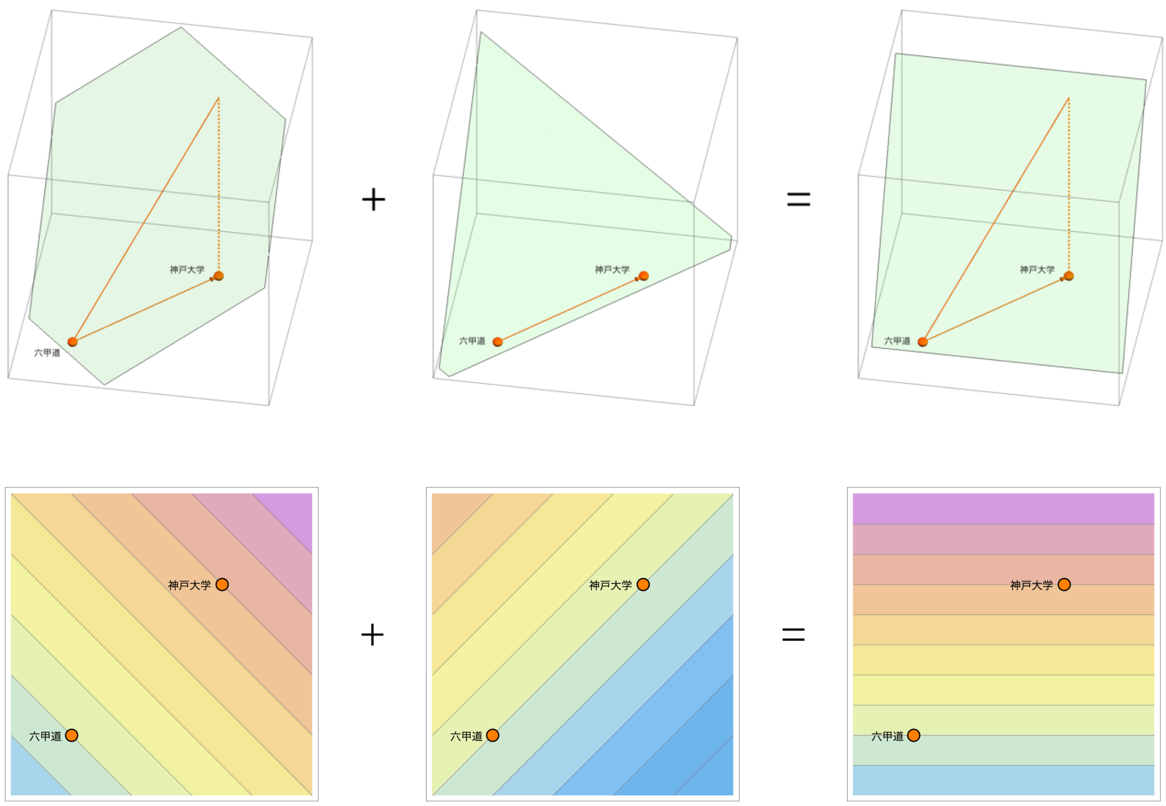


図 28: 双対ベクトル空間のベクトルの和。

$\tilde{p}(\vec{x})+\tilde{q}(\vec{x})+\tilde{r}(\vec{x})$ を返す関数」である。一方、右辺は「任意の $\vec{x}$ に対し $(\tilde{p}+\tilde{q})(\vec{x})+\tilde{r}(\vec{x})$ を返す関数、ただし $(\tilde{p}+\tilde{q})(\vec{x})$ は $\tilde{p}(\vec{x})+\tilde{q}(\vec{x})$ のこと」なのでこれも「任意の $\vec{x}$ に対し $\tilde{p}(\vec{x})+\tilde{q}(\vec{x})+\tilde{r}(\vec{x})$ を返す関数」であり、左辺と右辺が等しいことが示される。このようにして関数 $\tilde{p}$ たちがベクトル空間の公理を満たすことが示されるが、このベクトル空間は元の $\vec{x}$ たちの作るベクトル空間とは別物である。これを**双対ベクトル空間**と言う。

以前に、ベクトルとは座標系に依らず存在するものであることを強調した。では双対ベクトル空間のベクトルは座標系に依らず存在するだろうか。これも標高を想像するとわかりやすいかもしれない。六甲道から神戸大学一帯の地形 (を全く凹凸のない斜面とみなしたもの) は、座標系に依らず存在する[12]。このように、双対ベクトル空間のベクトルも座標系に依らず存在する。

双対ベクトル空間の成分と基底　双対ベクトル空間のベクトルについて、元のベクトル空間と同様に、座標系を取ったときの成分や基底を議論することができる。勾配 $\tilde{p}$ の例を引き続き用いることにしよう。座標系 $\mathscr{O}$ を採用し、位置ベクトルを $\vec{x}=x^1\vec{e}_1+x^2\vec{e}_2$ と成分表示したとき、線形性から

$$\tilde{p}(\vec{x})=\tilde{p}(x^1\vec{e}_1+x^2\vec{e}_2)=\tilde{p}(x^1\vec{e}_1)+\tilde{h}(x^2\vec{e}_2)=x^1\tilde{p}(\vec{e}_1)+x^2\tilde{p}(\vec{e}_2), \tag{3.10}$$

となる。図 26 において実際これが成り立っていることが確認できる。ここに現れる $\tilde{p}(\vec{e}_1),\tilde{p}(\vec{e}_2)$ を $\tilde{p}$ の成分

$$p_1:=\tilde{p}(\vec{e}_1), \qquad p_2:=\tilde{p}(\vec{e}_2), \tag{3.11}$$

と呼ぶ。すると $\tilde{p}(\vec{x})$ は

$$\tilde{p}(\vec{x})=x^1p_1+x^2p_2, \tag{3.12}$$

と書かれることがわかる。また、この成分の定義から、変換則が

$$p_{\bar{j}}\overset{\text{成分の定義}}{=}\tilde{p}(\vec{e}_{\bar{j}})\overset{\text{基底ベクトルの変換則}}{=}\tilde{p}(\Lambda^i{}_{\bar{j}}\vec{e}_i)\overset{\tilde{p}\text{の線形性}}{=}\Lambda^i{}_{\bar{j}}\tilde{p}(\vec{e}_i)\overset{\text{成分の定義}}{=}\Lambda^i{}_{\bar{j}}p_i, \tag{3.13}$$

となることがわかる。ところで、ベクトルの成分に対しては記法

$$\vec{x}\underset{\mathscr{O}}{\rightarrow}(x^1,x^2), \tag{3.14}$$

があった。そこで双対ベクトルの成分についても同様に

$$\tilde{p}\underset{\mathscr{O}}{\rightarrow}(p_1,p_2), \tag{3.15}$$

という記法を採用する。どちらも似たような成分表示ができてはいるが、$\vec{x}$ と $\tilde{p}$ は概念的に別物であることを忘れてはいけない。

さて、双対ベクトルに成分が存在するいうことは、基底も存在するはずである。双対ベクトルはそもそもベクトルを引数として実数を与える線形関数のことだったから、双対ベクトル空間の基底もそのような関数になっている。この基底を双対基底と言う。双対基底 $\left\{\tilde{\omega}^i\right\}$ があると、任意の双対ベクトル $\tilde{p}$ は

$$\tilde{p}=p_i\tilde{\omega}^i, \tag{3.16}$$

と展開される。この関数にベクトル $\vec{x}$ を入れてみよう。まず

$$\tilde{p}(\vec{x})=p_ix^i, \tag{3.17}$$

[12] 座標系によって標高が変われば通学も楽なのだが、残念ながらそんなことは起こらない。

であることは上で確認した。一方、双対基底を用いると

$$\tilde{p}(\vec{x}) = p_i \tilde{\omega}^i(\vec{x}) = p_i \tilde{\omega}^i(x^j \vec{e}_j) = p_i x^j \tilde{\omega}^i(\vec{e}_j), \tag{3.18}$$

とも書ける。両式が矛盾しないためには

$$\tilde{\omega}^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j, \tag{3.19}$$

となる必要があり、これが双対基底 $\left\{\tilde{\omega}^i\right\}$ を定義する式となる。最後に、双対基底の変換則は

$$\tilde{\omega}^{\bar{i}} = \Lambda^{\bar{i}}{}_j \tilde{\omega}^j, \tag{3.20}$$

で与えられる。なぜなら、$\tilde{p} = p_i \tilde{\omega}^i$ は座標系に依らず存在する関数であるが、実際このように変換することで双対ベクトル $\tilde{p}$ が

$$p_{\bar{i}} \tilde{\omega}^{\bar{i}} = (\Lambda^k{}_{\bar{i}} p_k)(\Lambda^{\bar{i}}{}_j \tilde{\omega}^j) = \tilde{\omega}^j \Lambda^k{}_{\bar{i}} \Lambda^{\bar{i}}{}_j p_k = \tilde{\omega}^j \delta^k_j p_k = p_j \tilde{\omega}^j, \tag{3.21}$$

と基底に依らなくなるからである。

3.1 メトリックテンソル

テンソルのうち相対論で最もよく現れるものは「メトリックテンソル」である。本小節ではこれを導入的に説明する。ある系 $\mathscr{O}$ の基底 $\{\vec{e}_\alpha\}$ でのベクトル $\vec{A}, \vec{B}$ の表現

$$\vec{A} = A^\alpha \vec{e}_\alpha, \qquad \vec{B} = B^\beta \vec{e}_\beta, \tag{3.22}$$

に対し、これらのスカラー積は

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A^\alpha \vec{e}_\alpha) \cdot (B^\beta \vec{e}_\beta) = A^\alpha B^\beta (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta), \tag{3.23}$$

であるが、この最後の式は前節で学んだ

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta} := \begin{cases} -1 & (\alpha = \beta = 0) \\ +1 & (\alpha = \beta = 1 \text{ or } \alpha = \beta = 2 \text{ or } \alpha = \beta = 3) \\ 0 & (\alpha \neq \beta) \end{cases} \tag{3.24}$$

を用いると

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^\alpha B^\beta \eta_{\alpha\beta}, \tag{3.25}$$

と書くことができる[13]。この $\eta_{\alpha\beta}$ は「メトリックテンソルの成分」と呼ばれる。A^α, B^β が基底 $\{\vec{e}_\alpha\}$ を取ったときのベクトル $\vec{A}, \vec{B}$ の成分であったのと同様、$\eta_{\alpha\beta}$ はあくまで「成分」である。つまり基底に依らない何らかの量「メトリックテンソル」があり、$\eta_{\alpha\beta}$ は基底 $\{\vec{e}_\alpha\}$ を取ったときのそれの成分である。この基底に依らない量「メトリックテンソル」が何であるかについては以下で説明する。

ここで重要なことは、スカラー積 (3.25) を「2 つのベクトル $\vec{A}, \vec{B}$ に対し、$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^\alpha B^\beta \eta_{\alpha\beta}$ という実数を与える演算」と解釈できることである。これが以下に見るようにテンソルの定義の動機付けとなる。

[13] もちろん、$\eta_{\alpha\beta}$ の具体的表式を代入すると $\vec{A} \cdot \vec{B} = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3$ である。

3.2 テンソルの定義

前小節で 2 つのベクトルに対し実数を与える演算があることを見た。これを一般化して、テンソルを次のように定義する。

テンソル

タイプ $\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$ のテンソルとは、N 個のベクトルから実数への関数であって、その N 変数の各々について線形なもののことである。

この定義から、スカラー積 (3.25) がタイプ $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルとなることを確認しよう。まず、スカラー積 (3.25) は 2 個のベクトル $\vec{A},\vec{B}$ から実数 $\vec{A}\cdot\vec{B} = A^\alpha B^\beta \eta_{\alpha\beta}$ への関数である。次に線形性については、まず 1 つ目の変数 $\vec{A}$ について

$$(\alpha\vec{A})\cdot\vec{B} = \alpha(\vec{A}\cdot\vec{B}), \tag{3.26}$$

$$(\vec{A}+\vec{A}')\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}'\cdot\vec{B}, \tag{3.27}$$

が成り立つことが確認でき、同様に 2 つ目の変数 $\vec{B}$ についても

$$\vec{A}\cdot(\beta\vec{B}) = \beta(\vec{A}\cdot\vec{B}), \tag{3.28}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{B}') = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{B}', \tag{3.29}$$

が成り立つことが確認できる。以上より、スカラー積 (3.25) はタイプ $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルである。ここで、スカラー積が関数であることを強調するための記法を導入しよう。$\boldsymbol{g}$ を

$$\boldsymbol{g}(\vec{A},\vec{B}) := \vec{A}\cdot\vec{B}, \tag{3.30}$$

と定義する。こう書くことで、$\boldsymbol{g}(\ ,\ )$ が 2 つの変数を取る関数であることが明確になる。上に述べた線形性は

$$\boldsymbol{g}(\alpha\vec{A},\vec{B}) = \alpha\boldsymbol{g}(\vec{A},\vec{B}), \tag{3.31}$$

$$\boldsymbol{g}(\vec{A}+\vec{A}',\vec{B}) = \boldsymbol{g}(\vec{A},\vec{B})+\boldsymbol{g}(\vec{A}',\vec{B}), \tag{3.32}$$

および

$$\vec{A}\cdot(\beta\vec{B}) = \beta(\vec{A}\cdot\vec{B}), \tag{3.33}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{B}') = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{B}', \tag{3.34}$$

となる。

ここで注意することは、テンソルの定義自体はベクトルの成分に言及していないことである。テンソルの定義はあくまで一つあるいは複数の**ベクトル**から実数への関数であって、**成分**から実数への関数ではない。つまり、テンソルは**基準系に依存しない実数を与える関数**でなければならない。スカラー積 (3.25) については以前に基準系に依らない値を返すことを確認したため、テンソルの定義を満たしていることがわかる。

テンソルの成分　上でテンソルとはベクトルから実数への関数であることを見た。ところで、ベクトルには基底 $\{\vec{e}_\alpha\}$ を取ったときの成分という概念があった。テンソルについても、基底 $\{\vec{e}_\alpha\}$ を取ったときの成分を定義できる。

テンソルの成分

> タイプ $\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$ のテンソルの系 $\mathcal{O}$ での成分とは、系 $\mathcal{O}$ の基底 $\{\vec{e}_\alpha\}$ を引数に取ったときのテンソルの値である。

例えばメトリックテンソル $\boldsymbol{g}$ に対して、基底 $\{\vec{e}_\alpha\}$ を引数に取ったときの成分は

$$\boldsymbol{g}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta}, \tag{3.35}$$

である。これが上で $\eta_{\alpha\beta}$ を「メトリックテンソルの成分」と呼んだ理由である。メトリックテンソルとはあくまで関数 $\boldsymbol{g}$ であり、$\eta_{\alpha\beta}$ は基底 $\{\vec{e}_\alpha\}$ を取ったときの成分である。

コラム：関数

> 関数として最も頻繁に用いられる記法は
>
> $$y = f(x), \tag{3.36}$$
>
> であるが、$f(x)$ 自体は関数ではない。$f(x)$ はあくまで関数に引数 x を入れたときの特定の値である。関数というのは、あらゆる引数に対してそれに対応する値を与える規則であるから、関数と呼ぶべきものは $f(\ )$ あるいは単に f である。同様に、スカラー積 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ は関数の引数にベクトル $\vec{A}, \vec{B}$ を入れたときの特定の値であり、関数と呼ぶべきものは本来「$\cdot$」である。しかしこれでは記法としてわかりにくいため、上では $\boldsymbol{g}(\vec{A}, \vec{B}) := \vec{A}\cdot\vec{B}$ という記法を導入した。こうすることで、$\boldsymbol{g}(\ ,\ )$ あるいは単に $\boldsymbol{g}$ が関数であることがわかりやすくなる。

3.3 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ テンソル＝一形式

タイプ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のテンソルは、別名「コベクトル」「共変ベクトル」「一形式」とも呼ばれる。

一般的性質　以下では一形式には記号の上に「~」を付けることにする。任意の一形式 $\tilde{p}, \tilde{q}$ を考える。定義上 $\tilde{p}, \tilde{q}$ はどちらも、1 つのベクトルを引数として実数を与える関数である。これらの一形式には「和」と「定数倍」

$$\tilde{s} = \tilde{p} + \tilde{q}, \tag{3.37}$$

$$\tilde{r} = c\tilde{p}, \tag{3.38}$$

が自然に定義できる。つまり、$\tilde{p}$ と $\tilde{q}$ が「足された」関数 $\tilde{s}$ というのは任意のベクトル $\vec{A}$ を入れたときに $\tilde{p}(\vec{A}) + \tilde{q}(\vec{A})$ を返すような関数

$$\tilde{s}(\vec{A}) = \tilde{p}(\vec{A}) + \tilde{q}(\vec{A}), \tag{3.39}$$

として定義できるし、$\tilde{p}$ を「定数 c 倍した」関数 $\tilde{r}$ というのは任意のベクトル $\vec{A}$ を入れたときに $c\tilde{p}(\vec{A})$ を返すような関数

$$\tilde{r}(\vec{A}) = c\tilde{p}(\vec{A}), \tag{3.40}$$

として定義できる。このことから、全ての一形式の集合はベクトル空間の公理を満たすことがわかる。これが、一形式がコ「ベクトル」あるいは共変「ベクトル」とも呼ばれる理由である。

$\tilde{p}$ の成分や変換則を調べてみよう。定義上 $\tilde{p}$ の成分とは、基底 $\{\vec{e}_\alpha\}$ を引数に取ったときの値である。これを p_α と書くことにする

$$p_\alpha := \tilde{p}(\vec{e}_\alpha). \tag{3.41}$$

すると

$$\tilde{p}(\vec{A}) = \tilde{p}(A^\alpha \vec{e}_\alpha) \overset{\tilde{p}\text{の線形性}}{=} A^\alpha \tilde{p}(\vec{e}_\alpha) \overset{\text{テンソルの成分の定義}}{=} A^\alpha p_\alpha, \tag{3.42}$$

となる。つまり、ベクトルを実数に対応させる関数 $\tilde{p}$ は、ベクトルと一形式の成分を用いて

$$A^\alpha p_\alpha = A^0 p_0 + A^1 p_1 + A^2 p_2 + A^3 p_3, \tag{3.43}$$

と書けることがわかる。符号が全て $+$ であることに注意しよう。この操作を $\vec{A}$ と $\tilde{p}$ の縮約と呼ぶ。改めて書くと

ベクトルと一形式の縮約

$$\tilde{p}(\vec{A}) = A^\alpha p_\alpha = A^0 p_0 + A^1 p_1 + A^2 p_2 + A^3 p_3, \tag{3.44}$$

である。

さて、一形式 $\tilde{p}$ の別の基底 $\left\{\vec{e}_{\overline{\beta}}\right\}$ における成分は

$$p_{\overline{\beta}} := \tilde{p}(\vec{e}_{\overline{\beta}}) = \tilde{p}(\Lambda^\alpha{}_{\overline{\beta}} \vec{e}_\alpha) = \Lambda^\alpha{}_{\overline{\beta}} \tilde{p}(\vec{e}_\alpha) = \Lambda^\alpha{}_{\overline{\beta}} p_\alpha, \tag{3.45}$$

であるが、これと基底ベクトルの変換則

$$\vec{e}_{\overline{\beta}} = \Lambda^\alpha{}_{\overline{\beta}} \vec{e}_\alpha, \tag{3.46}$$

を比べると、一形式の成分は基底ベクトルと同じように変換することがわかる。一形式が「コ」ベクトルあるいは「共」変ベクトルと呼ばれる理由は、基底ベクトルと「同じように」変換するからである。

ところで以前に、ベクトルの成分と基底ベクトルが逆の変換を受けることで、それらの積であるベクトル $\vec{A}$ 自身は基底に依らなくなっていることを見た。式で書くと

$$A^{\overline{\alpha}} \vec{e}_{\overline{\alpha}} = \left(\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_\beta A^\beta\right)\left(\Lambda^\nu{}_{\overline{\alpha}} \vec{e}_\nu\right) = \vec{e}_\nu \Lambda^\nu{}_{\overline{\alpha}} \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_\beta A^\beta = \vec{e}_\nu \delta^\nu_\beta A^\beta = A^\beta \vec{e}_\beta, \tag{3.47}$$

である。ベクトルと一形式の縮約の場合も同様のことが起きている。つまり一形式の成分は基底ベクトルと同様の変換を受けるため、縮約 $A^\alpha p_\alpha$ は確かに系に依らなくなっている。式で書くと

$$A^{\overline{\alpha}} p_{\overline{\alpha}} = \left(\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_\beta A^\beta\right)\left(\Lambda^\nu{}_{\overline{\alpha}} p_\nu\right) = p_\nu \Lambda^\nu{}_{\overline{\alpha}} \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_\beta A^\beta = p_\nu \delta^\nu_\beta A^\beta = A^\beta p_\beta, \tag{3.48}$$

である。

双対基底 = 基底一形式　全ての一形式の集合はベクトル空間を作ること、およびそれを双対ベクトル空間と言うことを上で見た。任意のベクトル空間には基底があるはずだが、では双対ベクトル空間の基底は何だろうか。基底とは、ベクトル空間の任意の元をその線型結合で表せるようなベクトルたちのことである。今の場合、任意の一形式 $\tilde{p}$ を

$$\tilde{p} = (\text{成分 }1) \times (\text{一形式の基底 }1) + (\text{成分 }2) \times (\text{一形式の基底 }2) + (\text{成分 }3) \times (\text{一形式の基底 }3) + (\text{成分 }4) \times (\text{一形式の基底 }4), \tag{3.49}$$

と表せるような一形式の基底の組を求めたい、ということである。この基底は**元のベクトル空間の基底 $\{\vec{e}_\alpha\}$ とは別物である**ことに注意しよう。双対ベクトル空間の基底はそれぞれが一形式、つまりそれぞれがベクトルを実数に写すような関数である。

ところで我々はすでに一形式の成分を $p_\alpha := \tilde{p}(\vec{e}_\alpha)$ と定義していた。以下に見るように、この定義によって一形式の基底 $\{\tilde{\omega}^\alpha, \alpha = 0,1,2,3\}$ が自然に定まり、それを $\{\vec{e}_\alpha\}$ に対する**双対基底**と呼ぶ。この $\tilde{\omega}^\alpha$ を定める手続きを見よう。まず双対基底があるとして、一形式を展開すると

$$\tilde{p} = p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha, \tag{3.50}$$

である。ベクトル $\vec{A}$ と一形式 $\tilde{p}$ の縮約は

$$\tilde{p}(\vec{A}) = p_\alpha A^\alpha, \tag{3.51}$$

であるが、一方で双対基底を用いると

$$\tilde{p}(\vec{A}) = p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha(\vec{A}) = p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha(A^\beta \vec{e}_\beta) = p_\alpha A^\beta \tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta), \tag{3.52}$$

とも書ける。両式が矛盾しないためには

双対基底

$$\tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta) = \delta^\alpha_\beta, \tag{3.53}$$

となる必要があり、これが双対基底 $\{\tilde{\omega}^\alpha\}$ を定義している。我々がこれまで用いてきた、成分を書き下す記法を用いると

$$\tilde{\omega}^0 \underset{\mathscr{O}}{\to} (1,0,0,0), \qquad \tilde{\omega}^1 \underset{\mathscr{O}}{\to} (0,1,0,0), \qquad \tilde{\omega}^2 \underset{\mathscr{O}}{\to} (0,0,1,0), \qquad \tilde{\omega}^3 \underset{\mathscr{O}}{\to} (0,0,0,1), \tag{3.54}$$

である。ここで、双対基底 $\{\tilde{\omega}^\alpha\}$ を定義する式 (3.53) は、必ずしも $\tilde{\omega}^0$ と $\vec{e}_0$ のような同じ添字を持つペアの間の関係ではないことに注意しよう。第 3.0 節で、$\vec{e}_2$ をそのままに保ちつつ $\vec{e}_1$ を変更すると、双対基底 $\tilde{\omega}^1$ と $\tilde{\omega}^2$ の両方が変化することを見た。ここでも同様に、例えば $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ をそのままに保ちつつ $\vec{e}_0$ を変更すると、双対基底 $\tilde{\omega}^0, \tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \tilde{\omega}^3$ は一般に全て変化する。

さて、我々はベクトルについては成分と基底の変換を知っており、双対ベクトルについては成分の変換を知っている。残るは双対基底 $\{\tilde{\omega}^\alpha\}$ の変換則であるが、それは

$$\tilde{\omega}^{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_\beta \tilde{\omega}^\beta, \tag{3.55}$$

である。実際このように変換することで双対ベクトル $\tilde{p}$ が

$$p_{\overline{\alpha}} \tilde{\omega}^{\overline{\alpha}} = (\Lambda^\nu{}_{\overline{\alpha}} p_\nu)(\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_\beta \tilde{\omega}^\beta) = \tilde{\omega}^\beta \Lambda^\nu{}_{\overline{\alpha}} \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_\beta p_\nu = \tilde{\omega}^\beta \delta^\nu_\beta p_\nu = p_\beta \tilde{\omega}^\beta, \tag{3.56}$$

と基底に依らなくなることが示される。

一形式の描像　第 3.0 節で先取りしたように、元のベクトル空間のベクトル (以下単に「ベクトル」) を矢印で表すとき、その双対ベクトル空間のベクトル (以下「双対ベクトル」) の適切なイメージは**勾配**である。以下はその理由になるが、少々込み入るので読み飛ばしてもよい。

まず素朴には、双対ベクトル空間もベクトル空間の一種なのだから、双対ベクトルもベクトルと同様の矢印で表したくなるだろう。しかし仮に両者を同様の矢印で表した場合、両者を同様のベクトルとして扱っていることに相当してしまう。これが許されない理由は単に「変換性が異なるものを同じイメージで描いてはいけない」でも良いのだが、詳しくは以下のような理由がある。

まず、ベクトルとベクトルの間には実数を与える関数は自動的には定義されない。というのも、我々はメトリックテンソル $\boldsymbol{g}$ を与えることでベクトルとベクトルの間にスカラー積 $\boldsymbol{g}(\vec{A},\vec{B})$ を定義したが、別のメトリックテンソルを用いる場合 (これは特殊相対論の範囲内では現れない) にはスカラー積は別の値を取ることになる。このように、ベクトルとベクトルに実数を与える演算はメトリックテンソルを定義して初めて与えられる。ところが、双対ベクトルとはそもそもベクトルを引数として実数値を返す関数であり、メトリックテンソルを始めとした他のテンソルの助けを借りずにベクトルを実数値に写している。したがって、双対ベクトルは矢印で表されたベクトルに対しそれ単独で実数値をイメージさせる方法で描かなければならない。その描き方の例が勾配なのである。

3.4 関数の勾配と一形式

前小節で述べた「一形式 (双対ベクトル) の適切なイメージは勾配である」について考察しよう。

勾配　任意の事象点 $\vec{x}$ で定義されたスカラー場 $\phi(\vec{x})$ を考える。スカラー場とは、任意の事象点 $\vec{x}$ に対して座標系に依らない実数値 $\phi(\vec{x})$ を返す関数である。粒子の世界線を考えると、ϕ はその世界線上の各事象点で値を取り、世界線上の事象点が変わるにしたがって ϕ の値も変わっていく。この世界線上の各点に、その世界線に沿った固有時間 τ、すなわちその世界線上を動いている時計が指す時刻を割り当てる。すると、世界線上の事象の座標は τ の関数として

$$t = t(\tau), \qquad x = x(\tau), \qquad y = y(\tau), \qquad z = z(\tau), \tag{3.57}$$

と書かれる。このとき、四限速度は成分

$$\vec{U} \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right), \tag{3.58}$$

を持つ。ところで、ϕ は t,x,y,z への依存性を通じて

$$\phi(\tau) = \phi(t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau)), \tag{3.59}$$

と τ に依存しているから、ϕ の τ に対する変化率は

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial\phi}{\partial t}U^t + \frac{\partial\phi}{\partial x}U^x + \frac{\partial\phi}{\partial y}U^y + \frac{\partial\phi}{\partial z}U^z, \tag{3.60}$$

となる。さて、四元速度 $\vec{U}$ がベクトルであったことを思い出し、また変化率 $\frac{d\phi}{d\tau}$ が座標に依らない数であることに気を付けると、上の式はベクトル $\vec{U}$ から数 $\frac{d\phi}{d\tau}$ を作る方法を一つ与えており、しかも $\frac{d\phi}{d\tau}$ は $\vec{U}$ の線形関数である。ベクトルから数を作る線形な関数を双対ベクトル、あるいは一形式と呼んだのであった。この一形式、つまり $\vec{U}$ を引数として $\frac{d\phi}{d\tau}$ を与える関数を**勾配** $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ と呼ぶ。勾配 $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ の成分はどうなっているだろうか。ここで思い出すべきは、一形式 $\tilde{p}$ とベクトル $\vec{A}$ との間の縮約

$$\tilde{p}(\vec{A}) = p_\alpha A^\alpha, \qquad \tilde{p} \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (p_0, p_1, p_2, p_3), \qquad \vec{A} \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} \left(A^0, A^1, A^2, A^3\right), \tag{3.61}$$

である。今の場合、$\tilde{p}(\vec{A})$ が $\frac{d\phi}{d\tau} = \tilde{\mathrm{d}}\phi(\vec{U})$ に、$\tilde{p}$ が $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ に、$\vec{A}$ が $\vec{U}$ に相当している。これと式 (3.60) を見比べると

$$\left(\frac{d\phi}{d\tau} =\right) \tilde{\mathrm{d}}\phi(\vec{U}) = (\tilde{\mathrm{d}}\phi)_\alpha U^\alpha, \qquad \tilde{\mathrm{d}}\phi \underset{\mathscr{O}}{\to} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right), \qquad \vec{U} \underset{\mathscr{O}}{\to} \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right), \tag{3.62}$$

がわかる。勾配の成分について改めて書いておくと

勾配の成分

$$\tilde{\mathrm{d}}\phi \underset{\mathscr{O}}{\to} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^0}, \frac{\partial\phi}{\partial x^1}, \frac{\partial\phi}{\partial x^2}, \frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right), \tag{3.63}$$

である。

上の説明で四元速度を持ち出した理由がわかりにくければ、以下のように考えてもよい。粒子の世界線上の 2 事象間の変位ベクトル

$$\Delta\vec{x} \underset{\mathscr{O}}{\to} (\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z), \tag{3.64}$$

を考える。この 2 事象 $\vec{x}$ および $\vec{x} + \Delta\vec{x}$ の間でのスカラー場の変化 $\Delta\phi$ は、$\Delta\vec{x}$ が無限小であれば、

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z, \tag{3.65}$$

であるが、この式はベクトル $\Delta\vec{x}$ から実数 $\Delta\phi$ を作る方法を一つ与えており、しかも $\Delta\phi$ は (無限小な $\Delta\vec{x}$ に対し) $\Delta\vec{x}$ の線形関数である。この関数を上と同じく $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ と呼ぶと、一形式 $\tilde{p}$ とベクトル $\vec{A}$ との間の縮約

$$\tilde{p}(\vec{A}) = p_\alpha A^\alpha, \qquad \tilde{p} \underset{\mathscr{O}}{\to} (p_0, p_1, p_2, p_3), \qquad \vec{A} \underset{\mathscr{O}}{\to} \left(A^0, A^1, A^2, A^3\right), \tag{3.66}$$

において、$\tilde{p}(\vec{A})$ が $\Delta\phi = \tilde{\mathrm{d}}\phi(\Delta\vec{x})$ に、$\tilde{p}$ が $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ に、$\vec{A}$ が $\Delta\vec{x}$ に相当している。つまり

$$(\Delta\phi =)\ \tilde{\mathrm{d}}\phi(\Delta\vec{x}) = (\tilde{\mathrm{d}}\phi)_\alpha(\Delta x)^\alpha, \qquad \tilde{\mathrm{d}}\phi \underset{\mathscr{O}}{\to} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right), \qquad \Delta\vec{x} \underset{\mathscr{O}}{\to} (\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z), \tag{3.67}$$

である。式 (3.62) および (3.67) のいずれでも $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ の成分は同じである。先の議論であえて四元速度を持ち出して、τ に関する微分で考えた理由は、ここでの議論だと式 (3.65) において $\Delta\vec{x}$ を無限小として説明する必要が出るためである。この「無限小の $\Delta\vec{x}$」という制約を外すために、各点 $\vec{x}$ ごとに仮想的に別々の線形空間を考えると便利である。この線型空間を接空間と言うが、ここでは詳しくは触れないことにする。

勾配の変換則　勾配 $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ の変換則を確認する。一形式の成分の変換則は

$$(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_{\overline{\alpha}} = \Lambda^{\beta}{}_{\overline{\alpha}}(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_\beta, \tag{3.68}$$

であることを先に見た。しかし、そもそも偏微分の連鎖律より

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^{\overline{\alpha}}} = \frac{\partial\phi}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\overline{\alpha}}}, \tag{3.69}$$

が成り立つことを我々は知っている。左辺の $\frac{\partial\phi}{\partial x^{\overline{\alpha}}}$ は勾配 $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ の系 $\overline{\mathscr{O}}$ における成分 $(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_{\overline{\alpha}}$ であり、右辺の $\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta}$ は勾配 $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ の系 $\mathscr{O}$ における成分 $(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_\beta$ であるから、式 (3.69) は

$$(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_{\overline{\alpha}} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\overline{\alpha}}}(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_\beta, \tag{3.70}$$

を意味している。これが式 (3.68) と両立しているか確認しよう。座標の変換則から

$$x^{\beta} = \Lambda^{\beta}{}_{\overline{\alpha}} x^{\overline{\alpha}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\overline{\alpha}}} = \Lambda^{\beta}{}_{\overline{\alpha}}, \tag{3.71}$$

となるので、確かに式 (3.68) と (3.69) は両立していることがわかる。

微分に対する記法　以下では微分に対する記法として

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} := \phi_{,x}\ , \tag{3.72}$$

あるいはより一般に

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^{\alpha}} := \phi_{,\alpha}\ , \tag{3.73}$$

を採用する。後者の記法においては、左辺の x^{α} は上付き添字を持つが、右辺には α は下付き添字として現れることに注意が必要である。

また、以下では双対基底 $\{\tilde{\omega}^{\alpha}\}$ に対し

$$\tilde{\mathrm{d}} x^{\alpha} := \tilde{\omega}^{\alpha}, \tag{3.74}$$

という記法を採用する。その理由は以下の通りである。先にスカラー場 ϕ に対し勾配 $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ という一形式が定義できることを見た。その成分は

$$\tilde{\mathrm{d}}\phi \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^0}, \frac{\partial \phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \phi}{\partial x^2}, \frac{\partial \phi}{\partial x^3}\right), \tag{3.75}$$

であった。さて、ここでスカラー場 $\phi(\vec{x})$ として x^{α} を採用してみる。つまり、任意の事象点 $\vec{x}$ に対し、$\mathscr{O}$ での座標 x^{α} を返すような関数を $\phi(\vec{x})$ として採用するということである[14]。$\alpha = 0, 1, 2, 3$ のそれぞれの場合について、勾配の成分は

$$\tilde{\mathrm{d}}x^0 \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (1,0,0,0), \qquad \tilde{\mathrm{d}}x^1 \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (0,1,0,0), \qquad \tilde{\mathrm{d}}x^2 \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (0,0,1,0), \qquad \tilde{\mathrm{d}}x^3 \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (0,0,0,1), \tag{3.76}$$

となる。一方、双対基底の成分は

$$\tilde{\omega}^0 \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (1,0,0,0), \qquad \tilde{\omega}^1 \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (0,1,0,0), \qquad \tilde{\omega}^2 \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (0,0,1,0), \qquad \tilde{\omega}^3 \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} (0,0,0,1), \tag{3.77}$$

であった。これは双対基底を定義する $\tilde{\omega}^{\alpha}(\vec{e}_{\beta}) = \delta^{\alpha}_{\beta}$ の単なる言い換えであることも思い出そう。式 (3.76) および (3.77) を比較すると、式 (3.74) の記法の妥当性がわかる。

垂直一形式　あるベクトルに対して、それに垂直なベクトルをどう定義するか考えよう。ベクトル同士の垂直は、2 つのベクトルにスカラー積が定義されている場合に、その値がゼロであるとして定義される。このスカラー積はメトリックテンソルを通じて与えられるため、メトリックテンソルの定義なしにベクトル同士の垂直は定義できない。

一方、以前に強調したように、双対ベクトルすなわち一形式は定義上ベクトルを引数として実数を返す線形な関数であるから、スカラー積の定義とは関係なく値が定義されている。そこで、あるベクトルに対して垂直な一形式を、そのベクトルを引数としたときにゼロを返すような一形式として定義できる。

[14] スカラー場 ϕ とは各事象点 $\vec{x}$ に対し座標系に依らない実数 $\phi(\vec{x})$ を返す関数であったから、$\phi(\vec{x})$ として座標系の選択に依ってしまいそうな x^{α} を採用していいのかと疑問に思うかもしれない。ここではスカラー場 $\phi(\vec{x})$ として「ある特別に選んだ系 $\mathscr{O}$ での x^{α} 座標」を採用したと考える。つまりこのスカラー場はどの系で評価しても系 $\mathscr{O}$ での x^{α} 座標を返すようなスカラー場であり、系 $\overline{\mathscr{O}}$ で評価したときに $x^{\overline{\alpha}}$ 座標を返す、というような振る舞いはしない量である (そのような振る舞いをする量はベクトルと呼ばれるのであった)。

この定義を拡張して、一形式がある表面に垂直であるとは、その表面に接する任意のベクトルに対し値がゼロとなることと定義する。そのような一形式を**垂直一形式**と言う。特に表面が閉じている場合には、外向きのベクトル、内向きのベクトル、および表面に接するベクトルが存在し得る。このとき、外向きの垂直一形式とは、垂直一形式であってしかも外向きのベクトルに対する値が正であるものを言う。

3.5 $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソル

タイプ $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルは、定義上 2 つのベクトルを引数として実数を返す線形な関数である。その例はすでに登場したメトリックテンソル $\boldsymbol{g}(\vec{A},\vec{B})$ である。他の例は、例えば $\tilde{p},\tilde{q}$ を一形式とし $\tilde{p}(\vec{A})\tilde{q}(\vec{B})$ を返すような関数として作ることができる。このような関数を $\tilde{p}\otimes\tilde{q}$ と書く。つまり、$\tilde{p}\otimes\tilde{q}$ は任意のベクトル $\vec{A},\vec{B}$ に対し

$$(\tilde{p}\otimes\tilde{q})(\vec{A},\vec{B}) := \tilde{p}(\vec{A})\tilde{q}(\vec{B}), \tag{3.78}$$

となる関数である。記号 $\otimes$ は**外積記号**と呼ばれる。ここで $\tilde{p}\otimes\tilde{q}$ と $\tilde{q}\otimes\tilde{p}$ は異なるテンソルであることに注意が必要である。実際、

$$(\tilde{p}\otimes\tilde{q})(\vec{A},\vec{B}) = \tilde{p}(\vec{A})\tilde{q}(\vec{B}), \qquad (\tilde{q}\otimes\tilde{p})(\vec{A},\vec{B}) = \tilde{q}(\vec{A})\tilde{p}(\vec{B}), \tag{3.79}$$

となるから、これらは関数として別物である。

任意の $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルは必ず $\tilde{p}\otimes\tilde{q}$ の形で書くことができるのか、という疑問が出るかもしれない。答えは否である。例えば一形式 $\tilde{p},\tilde{q},\tilde{r},\tilde{s}$ から構成した $\tilde{p}\otimes\tilde{q}+\tilde{r}\otimes\tilde{s}$ という $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルを考えることができる。このテンソルは、任意のベクトル $\vec{A},\vec{B}$ に対し

$$(\tilde{p}\otimes\tilde{q}+\tilde{r}\otimes\tilde{s})(\vec{A},\vec{B}) = \tilde{p}(\vec{A})\tilde{q}(\vec{B})+\tilde{r}(\vec{A})\tilde{s}(\vec{B}), \tag{3.80}$$

を返すような関数である。このような関数は確かに線形性を満たすので $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルである。しかし、任意の一形式 $\tilde{p},\tilde{q},\tilde{r},\tilde{s}$ に対し、$\tilde{p}\otimes\tilde{q}+\tilde{r}\otimes\tilde{s}$ は必ずしも一形式の積 $\tilde{t}\otimes\tilde{u}$ の形で書けるとは限らない。

成分　上で見たように、一般の $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルは外積 $\tilde{t}\otimes\tilde{u}$ の形で書けるとは限らない。しかしながら、$\tilde{t}\otimes\tilde{u}$ の形のテンソルの**和**として表すことはできる。これを見るため、まず任意の $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソル $\boldsymbol{f}$ を考えよう。その成分は定義上

$$f_{\alpha\beta} := \boldsymbol{f}(\vec{e}_\alpha,\vec{e}_\beta), \tag{3.81}$$

である。添字 α, β はそれぞれ $0,1,2,3$ の範囲を取るから、$\boldsymbol{f}$ は計 $4 \times 4 = 16$ 個の成分を持つ。これらの成分を用いて、任意のベクトル $\vec{A}, \vec{B}$ に対する $\boldsymbol{f}$ の値を

$$\boldsymbol{f}(\vec{A}, \vec{B}) = \boldsymbol{f}(A^\alpha \vec{e}_\alpha, B^\beta \vec{e}_\beta) = A^\alpha B^\beta \boldsymbol{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = A^\alpha B^\beta f_{\alpha\beta}, \tag{3.82}$$

と表すことができる。このようなテンソルに対する基底を、一形式の場合と同様に作ることができるだろうか。すなわち、任意の $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソル $\boldsymbol{f}$ を

$$\boldsymbol{f} = f_{\alpha\beta} \tilde{\omega}^{\alpha\beta}, \tag{3.83}$$

と展開する基底 $\tilde{\omega}^{\alpha\beta}$ を定義できるだろうか。これができると仮定すると、

$$\boldsymbol{f}(\vec{A}, \vec{B}) = f_{\alpha\beta} \tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{A}, \vec{B}) = f_{\alpha\beta} \tilde{\omega}^{\alpha\beta}(A^\mu \vec{e}_\mu, B^\nu \vec{e}_\nu) = f_{\alpha\beta} A^\mu B^\nu \tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu), \tag{3.84}$$

となるから、式 (3.82) および (3.84) を比較して

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu, \tag{3.85}$$

が $\tilde{\omega}^{\alpha\beta}$ に対し要求される式となる。このような $\tilde{\omega}^{\alpha\beta}$ は、一形式の基底 $\tilde{\omega}^\alpha$ を用いて構成することができる。実際、$\tilde{\omega}^{\alpha\beta}$ を

$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルの基底

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta} := \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta, \tag{3.86}$$

と定義してみる。繰り返しになるが、これは任意のベクトル $\vec{A}, \vec{B}$ に対し

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{A}, \vec{B}) := \tilde{\omega}^\alpha(\vec{A}) \tilde{\omega}^\beta(\vec{B}), \tag{3.87}$$

となることを意味する。すると、一形式の基底が満たす式

$$\tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta) = \delta^\alpha_\beta, \tag{3.88}$$

により式 (3.85) が自動的に満たされる。したがって $\tilde{\omega}^{\alpha\beta} := \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta$ は全ての $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルに対する基底であり、任意の $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルは

$$\boldsymbol{f} = f_{\alpha\beta} \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta, \tag{3.89}$$

と書くことができる。

対称性　タイプ $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルは二つの引数を持ち、それらの順序を交換すると一般には値が変わる。しかし、特に任意のベクトル $\vec{A},\vec{B}$ に対し

対称テンソル

$$\boldsymbol{f}(\vec{A},\vec{B}) = \boldsymbol{f}(\vec{B},\vec{A}), \tag{3.90}$$

を満たすような $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルは対称と呼ばれる。対称なテンソルの成分に対する関係は、$\vec{A}=\vec{e}_\alpha, \vec{B}=\vec{e}_\beta$ の場合を考えると

対称テンソルの成分

$$f_{\alpha\beta} = \boldsymbol{f}(\vec{e}_\alpha,\vec{e}_\beta) = \boldsymbol{f}(\vec{e}_\beta,\vec{e}_\alpha) = f_{\beta\alpha}, \tag{3.91}$$

と導かれる。この関係式は、成分から作った行列が対称であるという条件と同じである。さて、対称とは限らない任意の $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソル $\boldsymbol{h}$ を考えると、対称テンソル $\boldsymbol{h}_{(S)}$ を

対称化されたテンソル

$$\boldsymbol{h}_{(S)}(\vec{A},\vec{B}) := \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A},\vec{B}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{B},\vec{A}), \tag{3.92}$$

のように構成することができる。実際、

$$\boldsymbol{h}_{(S)}(\vec{A},\vec{B}) := \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A},\vec{B}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{B},\vec{A}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{B},\vec{A}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A},\vec{B}) =: \boldsymbol{h}_{(S)}(\vec{B},\vec{A}), \tag{3.93}$$

となるので対称テンソルの定義を満たしている。これは成分では

$$h_{(S)\alpha\beta} := \boldsymbol{h}_{(S)}(\vec{e}_\alpha,\vec{e}_\beta) = \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{e}_\alpha,\vec{e}_\beta) + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{e}_\beta,\vec{e}_\alpha) = \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha}), \tag{3.94}$$

を意味する。この性質は特に重要なので、記法

対称化されたテンソルの成分

$$h_{(\alpha\beta)} \left(:= h_{(S)\alpha\beta}\right) = \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha}), \tag{3.95}$$

を定義する。

　対称テンソルが定義されたので、反対称テンソルも定義しよう。任意のベクトル $\vec{A},\vec{B}$ に対し

反対称テンソル

$$\boldsymbol{f}(\vec{A},\vec{B}) = -\boldsymbol{f}(\vec{B},\vec{A}), \tag{3.96}$$

を満たすような $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルは反対称と呼ばれる。反対称なテンソルの成分に対する関係は

反対称テンソルの成分

$$f_{\alpha\beta} = \boldsymbol{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = -\boldsymbol{f}(\vec{e}_\beta, \vec{e}_\alpha) = -f_{\beta\alpha}, \tag{3.97}$$

と導かれる。この関係式は、成分から作った行列が反対称であるという条件と同じである。さて、対称とは限らない任意の $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソル $\boldsymbol{h}$ を考えると、反対称テンソル $\boldsymbol{h}_{(A)}$ を

反対称化されたテンソル

$$\boldsymbol{h}_{(A)}(\vec{A}, \vec{B}) := \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A}, \vec{B}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{B}, \vec{A}), \tag{3.98}$$

のように構成することができる。実際、

$$\boldsymbol{h}_{(A)}(\vec{A}, \vec{B}) := \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A}, \vec{B}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{B}, \vec{A}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{B}, \vec{A}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{A}, \vec{B}) =: -\boldsymbol{h}_{(A)}(\vec{B}, \vec{A}), \tag{3.99}$$

となるので反対称テンソルの定義を満たしている。これは成分では

$$h_{(A)\alpha\beta} := \boldsymbol{h}_{(A)}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) - \frac{1}{2}\boldsymbol{h}(\vec{e}_\beta, \vec{e}_\alpha) = \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta} - h_{\beta\alpha}), \tag{3.100}$$

を意味する。対称テンソルの場合と同様に、記法

反対称化されたテンソルの成分

$$h_{[\alpha\beta]} \left(:= h_{(A)\alpha\beta}\right) = \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta} - h_{\beta\alpha}), \tag{3.101}$$

を定義する。

対称化されたテンソルと反対称化されたテンソルの和を取ると、元のテンソルに戻ることが

$$h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}) = h_{(\alpha\beta)} + h_{[\alpha\beta]}, \tag{3.102}$$

からわかる。したがって、任意の $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルは対称部分と反対称部分に**一意に**分けることができる。また、メトリックテンソル $\boldsymbol{g}$ は

$$\boldsymbol{g}(\vec{A}, \vec{B}) = -A^0B^0 + A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3, \tag{3.103}$$

を思い出すと、対称

$$\boldsymbol{g}(\vec{A}, \vec{B}) = \boldsymbol{g}(\vec{B}, \vec{A}), \tag{3.104}$$

であることがわかる。

3.6 ベクトルから一形式への写像としてのメトリック

メトリックテンソル $\boldsymbol{g}$ とは、ベクトル $\vec{A}, \vec{B}$ を引数としてスカラー積 $\boldsymbol{g}(\vec{A}, \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B}$ を与える関数であった。実はメトリックは、任意のベクトル $\vec{V}$ を 1 つ固定すると、ベクトルと一形式の間の写像と見なすことができる。これを以下で見

てみよう。ベクトルを 1 つ引数に取る線形な関数 $\tilde{V}$ を、ベクトルを $\boldsymbol{g}(\ ,\ )$ の第一引数にベクトル $\vec{V}$ が入った量

$$\tilde{V}(\ ) := \boldsymbol{g}(\vec{V},\ ), \tag{3.105}$$

として定義する。ここで $\tilde{V}$ に「~」が付いているのは、$\tilde{V}$ が一形式であることによる。実際、$\tilde{V}$ は任意のベクトル $\vec{A}$ に対し、

$$\tilde{V}(\vec{A}) = \boldsymbol{g}(\vec{V},\vec{A}), \tag{3.106}$$

を返す。メトリックテンソルは定義上 2 つの引数に対して線形だから、$\tilde{V}$ も引数に対して線形であり、よって $\tilde{V}$ は一形式である。また、メトリックテンソル $\boldsymbol{g}$ は対称なので次のようにも書ける

$$\tilde{V}(\ ) := \boldsymbol{g}(\ ,\vec{V}). \tag{3.107}$$

一形式 $\tilde{V}$ の成分は、定義に従って計算すると

$$V_\alpha := \tilde{V}(\vec{e}_\alpha) = \boldsymbol{g}(\vec{V},\vec{e}_\alpha) = \vec{V}\cdot\vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha\cdot\vec{V} = \vec{e}_\alpha\cdot(V^\beta\vec{e}_\beta) = (\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta)V^\beta = \eta_{\alpha\beta}V^\beta, \tag{3.108}$$

であることがわかる。我々の記法では、一形式 $\tilde{V}$ の成分 V_α は、$\tilde{V}$ を構成する際に用意したベクトル $\vec{V}$ の成分 V^α と添字の位置だけで区別されることになる。ベクトル $\vec{V}$ は上付き、一形式 $\tilde{V}$ は下付きの添字を持つ。式 (3.108) の特別な場合として

$$V_0 = \eta_{0\beta}V^\beta = \eta_{00}V^0 + \eta_{01}V^1 + \eta_{02}V^2 + \eta_{03}V^3 = \eta_{00}V^0 = -V^0, \tag{3.109}$$

$$V_1 = \eta_{1\beta}V^\beta = \eta_{10}V^0 + \eta_{11}V^1 + \eta_{12}V^2 + \eta_{13}V^3 = \eta_{11}V^1 = V^1, \tag{3.110}$$

$$V_2 = \eta_{2\beta}V^\beta = \eta_{20}V^0 + \eta_{21}V^1 + \eta_{22}V^2 + \eta_{23}V^3 = \eta_{22}V^2 = V^2, \tag{3.111}$$

$$V_3 = \eta_{3\beta}V^\beta = \eta_{30}V^0 + \eta_{31}V^1 + \eta_{32}V^2 + \eta_{33}V^3 = \eta_{33}V^3 = V^3, \tag{3.112}$$

が成り立つことがわかる。つまり

$$\vec{V} \underset{\mathscr{O}}{\to} (a,b,c,d) \quad\Longleftrightarrow\quad \tilde{V} \underset{\mathscr{O}}{\to} (-a,b,c,d), \tag{3.113}$$

である。

逆変換　メトリックテンソル $\boldsymbol{g}$ は、任意のベクトル $\vec{A}$ (上では $\vec{V}$ と呼んでいた量) から一形式 $\tilde{A}$ (上では $\tilde{V}$ と呼んでいた量) を作ることがわかった。実は $\boldsymbol{g}$ は任意の一形式 $\tilde{A}$ からベクトル $\vec{A}$ を作ることもできる。

式 (3.108) が意味しているのは、$\{V_\alpha\}$ は行列 $\left[\eta_{\alpha\beta}\right]$ を $\left\{V^\beta\right\}$ に作用させることで得られるということである。もしこの行列が逆行列を持てば、その逆行列を左から掛けることによって $\left\{V^\beta\right\}$ が $\{V_\alpha\}$ から得られることになる。行列 $\left[\eta_{\alpha\beta}\right]$ に逆行列が存在するかどうかは行列式を見れば判定できるが、$\left[\eta_{\alpha\beta}\right]$ は対角成分 $(-1,1,1,1)$ を持つ行列だから行列式は -1 であり、確かに逆行列が存在する。この逆行列を $\left[\eta^{\alpha\beta}\right]$ と書き、その成分を $\eta^{\alpha\beta}$ と書くことにする。つまり

メトリックテンソルの成分 $\eta_{\alpha\beta}$ から成る行列 $\left[\eta_{\alpha\beta}\right]$ の逆行列

$$\text{行列}\left[\eta^{\alpha\beta}\right] := \text{行列}\left[\eta_{\alpha\beta}\right]\text{の逆行列}, \tag{3.114}$$

である。これを用いると

$$A_\alpha = \eta_{\alpha\beta} A^\beta, \tag{3.115}$$

$$A^\alpha = \eta^{\alpha\beta} A_\beta, \tag{3.116}$$

となる。したがって $\boldsymbol{g}$ によって与えられるベクトルと一形式の間の写像は 1 対 1 であり、逆を持つ。

ベクトルと一形式に対応があるということは、特に勾配 $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ に対応するベクトル $\vec{\mathrm{d}}\phi$ があるということである。このベクトルは、$\phi = (一定)$ の表面に直交する。実際、$\phi = (一定)$ の表面に沿った任意のベクトルを $\vec{V}$ としよう。定義上

$$\vec{\mathrm{d}}\phi \cdot \vec{V} = \tilde{\mathrm{d}}\phi(\vec{V}), \tag{3.117}$$

であるが、右辺の $\tilde{\mathrm{d}}\phi(\vec{V})$ は ϕ の $\vec{V}$ に沿った変化率を表していた。$\vec{V}$ は $\phi = (一定)$ の表面に沿ったベクトルだから

$$\tilde{\mathrm{d}}\phi(\vec{V}) = 0, \tag{3.118}$$

である。よって

$$\vec{\mathrm{d}}\phi \cdot \vec{V} = 0, \tag{3.119}$$

となる。

逆行列 $\left[\eta^{\alpha\beta}\right]$ の具体形は

$$\eta^{00} = -1, \qquad \eta^{0i} = 0, \qquad \eta^{ij} = \delta^{ij}, \tag{3.120}$$

となることが容易に確かめられる。ここから、行列 $\left[\eta_{\alpha\beta}\right]$ とその逆行列 $\left[\eta^{\alpha\beta}\right]$ は同一の行列であることがわかる。これは特殊相対論の範囲でのみ起こることであり、一般相対論ではメトリックテンソルの成分から成る行列がその逆行列と等しくなることは一般には起こらない。

ベクトルと一形式を区別する理由　Euclid 空間の Cartesian 座標 (デカルト座標) では、メトリックテンソルの成分は単に δ_{ij} であった。この場合は一形式の成分とそれに対応するベクトルの成分は同じである。しかし特殊相対論ではメトリックテンソルの成分が $\eta_{\alpha\beta}$ であることに起因して、一形式とそれに対応するベクトルでは成分が異なる。勾配が成分

$$\tilde{\mathrm{d}}\phi \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right), \tag{3.121}$$

を持つとき、それに対応するベクトル $\vec{\mathrm{d}}\phi$ は

$$\vec{\mathrm{d}}\phi \underset{\mathscr{O}}{\rightarrow} \left(-\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right), \tag{3.122}$$

を持つ。よってベクトルと一形式は区別しなければならない。

双対性の例　これまで見てきたように、ベクトルと一形式は双対性と言うべき性質を持っている。このような双対性の例は、特殊相対論以外にも現れる。

- 線形代数

線形代数における列ベクトル

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \end{pmatrix}, \tag{3.123}$$

と行ベクトル

$$\begin{pmatrix} p & q & \cdots \end{pmatrix}, \tag{3.124}$$

は双対と見なせる。実際、これらの積は実数

$$\begin{pmatrix} p & q & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \end{pmatrix} = ap + bq + \cdots, \tag{3.125}$$

である。したがって、行ベクトルは列ベクトルに対して値 (3.125) を与える一形式 (つまり、列ベクトル上での値が (3.125) であるような一形式) と考えることができる。

- 量子力学
  量子力学における波動関数

$$\psi(x), \tag{3.126}$$

には、その絶対値自乗 $|\psi(x)|^2$ が粒子の存在確率を与えるという性質がある。2 つの波動関数 $\phi(x), \psi(x)$ に対する内積は

$$\int d^3x \, \phi^*(x)\psi(x), \tag{3.127}$$

で与えられる。ここで $\phi(x)$ に対しては複素共役 $\phi^*(x)$ が取られていることに注意しよう。$\phi^*(x)$ は $\psi(x)$ に対して値 (3.127) を返す一形式 (つまり、$\psi(x)$ 上での値が (3.127) であるような一形式) となっている。量子力学においては、$\phi(x)$ を $\phi^*(x)$ に写す複素共役の操作が、特殊相対論においてメトリックテンソルを用いてベクトルから一形式を作る操作に対応している。

一形式の大きさとスカラー積　一形式 $\tilde{p}$ の大きさは、それと対応する (以降「付随する」とも言う) ベクトル $\vec{p}$ と同じ大きさとして定義される。

$$\tilde{p}^2 := \vec{p}^2 = \eta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta. \tag{3.128}$$

この表式からすると、$\tilde{p}$ の大きさを計算するにはまず対応するベクトル $\vec{p}$ の成分 p^α を計算する必要があるように見えるが、実はその必要はない。実際

$$\tilde{p}^2 = \eta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = \eta_{\alpha\beta}(\eta^{\alpha\mu} p_\mu)(\eta^{\beta\nu} p_\nu), \tag{3.129}$$

であり、

$$\eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\nu} = \delta^\nu_\alpha, \tag{3.130}$$

に注意すると

$$\tilde{p}^2 = \eta^{\alpha\nu} p_\alpha p_\nu, \tag{3.131}$$

となる。つまり、一形式 $\tilde{p}$ の大きさはその成分 p_α と $\eta^{\alpha\beta}$ から求めることができる。具体的に書き下すと

$$\tilde{p}^2 = -(p_0)^2 + (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2, \tag{3.132}$$

となる。右辺は系の取り方に依るように見えるかもしれないが、定義上一形式の大きさは付随するベクトルの大きさと同じであり、ベクトルの大きさは系の取り方に依らないため、一形式の大きさも系の取り方に依らない。また、この表式はベクトル $\vec{p}$ の大きさ

$$\vec{p}^{\,2} = -(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2, \tag{3.133}$$

を求める規則と同じになっている。しかし、これは特殊相対論においてメトリックテンソルの成分から成る行列の逆行列が自身と一致するという性質から来るものであり、一般相対論の範囲ではこれらの規則は一般には一致しない。

一形式の大きさが定義されたので、異なる一形式同士の内積も定義できる。つまり、任意の一形式 $\tilde{p}, \tilde{q}$ に対しそれらの内積を

$$\tilde{p} \cdot \tilde{q} := \frac{1}{2}\left[(\tilde{p} + \tilde{q})^2 - \tilde{p}^2 - \tilde{q}^2\right], \tag{3.134}$$

と定義する。その成分は

$$\tilde{p} \cdot \tilde{q} = -p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3, \tag{3.135}$$

となる。

垂直ベクトルと垂直単位一形式　ある面に対する垂直一形式とは、その面に沿った任意のベクトルに対しゼロを返すような一形式のことであった。では、ベクトルがある面に垂直であることはどう定義できるだろうか。そのベクトルに付随する一形式が垂直一形式であるときに、そのベクトルはその面に垂直であると言う。この定義は、そのベクトルがその面に沿った任意のベクトルと直交するという通常の定義に等価である。

大きさが ± 1 の時、垂直ベクトルあるいは垂直一形式は**単位垂直**であると呼ばれる。時間的ベクトルは大きさが常に負であるから、大きさを $+1$ にすることはできず、-1 にすることしかできない。また、ヌルベクトルは大きさがゼロであるから、ヌルベクトルがある面に垂直であっても、そのベクトルを単位垂直にすることはできない。

3 次元面は、その垂直ベクトルが時間的・空間的・ヌル的であるかに応じて、それぞれ時間的・空間的・ヌル的と呼ばれる。

3.7 $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ テンソル

一形式の関数としてのベクトル　今まで我々は、ベクトルがまず存在するとして、いくつかのベクトルを引数として実数へ写す線形関数として一形式や $\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$ テンソルを構成した。しかし、一形式を「双対ベクトル」と呼ぶ際の「双対」という言葉から察せられるように、一形式を実数へ写す線形関数がベクトルであるとみなしても全く問題ないことを見る。

あるベクトル $\vec{V}$ が与えられたとき、一形式 $\tilde{p}$ はそれを実数へ写す。これを式で書くと

$$\tilde{p}(\vec{V}) = p_\alpha V^\alpha, \tag{3.136}$$

であった。この右辺の実数を、ベクトル $\vec{V}$ が一形式 $\tilde{p}$ を実数へ写しているとみなし、それを $\vec{V}(\tilde{p})$ と書こう。つまり

$$\vec{V}(\tilde{p}) = \tilde{p}(\vec{V}) = p_\alpha V^\alpha, \tag{3.137}$$

である。このように書くと、ベクトル $\vec{V}$ と一形式 $\tilde{p}$ のどちらがどちらを実数に写しているかに関して対等な見方ができることがわかる。この対等性を強調して、

$$\langle \tilde{p}, \vec{V} \rangle := \vec{V}(\tilde{p}) = \tilde{p}(\vec{V}) = p_\alpha V^\alpha, \tag{3.138}$$

という記法を定義する。

$\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$ テンソル　上記を一般化して次のように定義する。

$\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$ テンソル

$\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$ テンソルとは、M 個の一形式から実数への線形な関数である。

このように定義すると、以前の $\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$ テンソルと同じ議論を $\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$ テンソルに対して適用できる。例えば $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ テンソルの最も簡単な例として

$$\vec{V} \otimes \vec{W}, \tag{3.139}$$

という量を考えることができる。これは 2 つの任意の一形式 $\tilde{p}, \tilde{q}$ を引数として実数

$$(\vec{V} \otimes \vec{W})(\tilde{p}, \tilde{q}) := \vec{V}(\tilde{p})\vec{W}(\tilde{q}) = V^\alpha p_\alpha W^\beta q_\beta, \tag{3.140}$$

を返す関数である。この $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ テンソルの成分とは、基底一形式 $\tilde{\omega}^\alpha$ を引数としたときの関数の値、すなわち

$$(\vec{V} \otimes \vec{W})(\tilde{\omega}^\alpha, \tilde{\omega}^\beta) = \vec{V}(\tilde{\omega}^\alpha)\vec{W}(\tilde{\omega}^\beta) = V^\alpha W^\beta, \tag{3.141}$$

である。また、$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ テンソルの基底は

$$\vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta, \tag{3.142}$$

である。

$\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ **テンソル**　最後の一般化として、次を定義する。

$\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$テンソル

$\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$テンソルとは、$M$ 個の一形式と N 個のベクトルから実数への線形な関数である。

例えば $\boldsymbol{R}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ テンソルとする。これは 1 つの一形式 $\tilde{p}$ と 1 つのベクトル $\vec{A}$ を引数として実数 $\boldsymbol{R}(\tilde{p};\vec{A})$ を返す関数である。$\boldsymbol{R}$ の成分は

$$R^{\alpha}{}_{\beta} := \boldsymbol{R}(\tilde{\omega}^{\alpha};\vec{e}_{\beta}), \tag{3.143}$$

である。一般に $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ テンソルの成分は、M 個の上付き添字と N 個の下付き添字を持つ。系を変換した際の $\boldsymbol{R}$ の成分の変換則は、

$$R^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}} = \boldsymbol{R}(\tilde{\omega}^{\overline{\alpha}};\vec{e}_{\overline{\beta}}) = \boldsymbol{R}(\Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\mu}\tilde{\omega}^{\mu};\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}\vec{e}_{\nu}) = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\mu}\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}\boldsymbol{R}(\tilde{\omega}^{\mu};\vec{e}_{\nu}) = \Lambda^{\overline{\alpha}}{}_{\mu}\Lambda^{\nu}{}_{\overline{\beta}}R^{\mu}{}_{\nu}, \tag{3.144}$$

である。このように、$\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ テンソルの変換則においては各々の添字が Λ で適切に変換される。ちなみに、$\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ テンソルの上付き添字は (それがベクトルの成分と同様の変換性を持っており、ベクトルの成分は基底ベクトルと反対に変換するため) 「反変」、下付き添字は (基底ベクトルと同様に変換するため) 「共変」と呼ばれる。

3.8 添字の上げ下げ

メトリックがベクトル $\vec{V}$ を一形式 $\tilde{V}$ に写すことを以前に見た。これを一般化して、メトリックは $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ テンソルを $\begin{pmatrix} M-1 \\ N+1 \end{pmatrix}$ テンソルに写像し、その逆写像は $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ テンソルを $\begin{pmatrix} M+1 \\ N-1 \end{pmatrix}$ テンソルに写像すると考えることができる。これを添字の上げ下げとして理解することが可能である。例えば $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ テンソル $\boldsymbol{T}$ を考えよう。先の議論から、これは 2 つの一形式と 1 つのベクトルを実数に写す線形関数であり、その成分は

$$T^{\alpha\beta}{}_{\gamma} := \boldsymbol{T}(\tilde{\omega}^{\alpha},\tilde{\omega}^{\beta};\vec{e}_{\gamma}), \tag{3.145}$$

である。メトリックテンソルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ テンソルから $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルを作る。実際、次の量を考えよう。

$$T^{\alpha}{}_{\beta\gamma} := \eta_{\beta\mu} T^{\alpha\mu}{}_{\gamma}. \tag{3.146}$$

この $T^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ を成分に持つテンソルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルとなっている。慣習的に、$T^{\alpha\beta}{}_{\gamma}$ を成分に持つ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ テンソルも、$T^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ を成分に持つ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルも同じ名前 $\boldsymbol{T}$ が付けられ、それらは添字の位置だけで区別される。他にも

$$T_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} := \eta_{\alpha\mu} T^{\mu\beta}{}_{\gamma}, \tag{3.147}$$

を成分に持つ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルも存在する。これは $T^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ を成分に持つ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルとは別物である。また、

$$T^{\alpha\beta\gamma} := \eta^{\gamma\mu} T^{\alpha\beta}{}_{\mu}, \tag{3.148}$$

を成分に持つ $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ テンソルも考えることができる。このように、添字の上げ下げで異なる $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ テンソルを作ることができる。

メトリックの混合成分 数 $\left\{\eta_{\alpha\beta}\right\}$ はメトリックの成分であり、数 $\left\{\eta^{\alpha\beta}\right\}$ は $\left\{\eta_{\alpha\beta}\right\}$ を行列とみなしたときの逆行列の成分である。さて、$\eta_{\alpha\beta}$ の添字を $\eta^{\alpha\beta}$ を使って上げることを考えると

$$\eta^{\alpha}{}_{\beta} := \eta^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta}, \tag{3.149}$$

という量が得られる。しかし、この右辺は行列にその逆行列を掛けたものの $\alpha\beta$ 成分であるから、Kronecker のデルタの $\alpha\beta$ 成分、すなわち

$$\eta^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}, \tag{3.150}$$

であることがわかる。もう一つの添字を上げると

$$\eta^{\alpha\gamma} \overset{\text{添字の「上げ」}}{=} \eta^{\beta\gamma} \eta^{\alpha}{}_{\beta} \overset{\text{式 (3.150)}}{=} \eta^{\beta\gamma} \delta^{\alpha}_{\beta} = \eta^{\alpha\gamma}, \tag{3.151}$$

となり、恒等式が得られる。したがって、$\eta^{\alpha\beta}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ テンソルであるメトリックテンソル $\boldsymbol{g}$ から、$\boldsymbol{g}^{-1}$ を用いて作った $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ テンソルの成分とみなすことができる。つまり、$\boldsymbol{g}$ の反変成分 $\eta^{\alpha\beta}$ は、その共変成分 $\eta_{\alpha\beta}$ の逆行列に等しくなるという特別なことが起こっている。このようなことは、適当に選んだテンソルでは起こることがない。実際、$T_{\alpha\beta}$ に対して $T^{\alpha\beta} := \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} T_{\mu\nu}$ を構成したとして、$T^{\alpha\beta}$ が $T_{\alpha\beta}$ の逆行列の成分になっているということは一般には起こらない。実は、$\boldsymbol{g}$ はそのようなことが成り立つ唯一のテンソルである。

メトリックと非メトリックベクトル代数　メトリックテンソルで添字の上げ下げをする必要性を考えてみよう。まず、メトリックテンソルの機能は

- ベクトル同士や一形式同士にスカラー積を定義すること
- その言い換えとして、ベクトルから一形式を作るあるいは (メトリックテンソルの逆写像が) 一形式からベクトルを作ることで両者を対応付けること

であったが、そもそもこのような機能が必要ない場合もある。メトリックテンソルがなければ、一形式がベクトルに作用したときにしか実数は作られないし、ベクトル同士あるいは一形式同士にスカラー積は定義されないが、実際このようなベクトル空間もあり得る。特殊相対論においては理論の構築にメトリックテンソルを必要とする、というだけである。

次に、メトリックテンソルではなく、他のテンソルでスカラー積の定義やベクトルと一形式の対応付けを行ってはいけないのだろうか。これはむしろ順序が逆で、そのような機能を持つテンソルをメトリックテンソルと呼ぶのである。メトリックとはベクトル空間の構造に余分に付けられた一部であり、異なる空間では異なるメトリックテンソルを持つ。その例は

- Riemann 空間 (全てのベクトルに正定値の大きさが与えられる)
- 擬 Riemann 空間 (不定値符号を持つ)
- スピノル空間 (反交換する量を考えることで、メトリックが反対称になる)

である。メトリックテンソルに成分 $\eta_{\alpha\beta}$ を用いると、特殊相対論が構成できる。一般相対論になると、メトリックテンソルに他の様々な成分を与えることになる。

3.9 テンソルの微分

関数 f は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ テンソルであり、それを用いて $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ テンソルである勾配 $\tilde{d}f$ を作れることを以前に見た。関数の微分は (共変) ランクが 1 階高いテンソルを作り出す。このことが、任意のクラスのテンソルの微分についても当てはまることを見る。

成分 $T^{\alpha}{}_{\beta}$ を持つ、位置の関数であるような $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ テンソル $\boldsymbol{T}$ を考えよう。$\boldsymbol{T}$ を基底で展開すると

$$\boldsymbol{T} = T^{\alpha}{}_{\beta}\tilde{\omega}^{\beta} \otimes \vec{e}_{\alpha}, \tag{3.152}$$

となる ($\tilde{\omega}^{\beta} \otimes \vec{e}_{\alpha}$ のように、先に基底一形式、次に基底ベクトルの順で書くのは文献 [1] の慣用である)。さて、関数に対して行ったのと同様に、粒子の固有時間 τ をパラメータとする世界線に沿って動くことを考えると、$\boldsymbol{T}$ の単位固有時間あたりの変化率は

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\boldsymbol{T}(\tau + \Delta\tau) - \boldsymbol{T}(\tau)}{\Delta\tau}, \tag{3.153}$$

である。基底一形式と基底ベクトルはどの位置でも同じ、つまり $\tilde{\omega}(\tau + \Delta\tau) = \tilde{\omega}(\tau)$ および $\vec{e}_{\alpha}(\tau + \Delta\tau) = \vec{e}_{\alpha}(\tau)$ であるから、これは

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{d\tau} = \left(\frac{dT^{\alpha}{}_{\beta}}{d\tau}\right) \tilde{\omega}^{\beta} \otimes \vec{e}_{\alpha}, \tag{3.154}$$

となる。ここで $\left(\frac{dT^{\alpha}{}_{\beta}}{d\tau}\right)$ は世界線に沿った成分 $T^{\alpha}{}_{\beta}$ の常微分である。関数 f から勾配 $\tilde{d}f$ を作ったときと同様に、微分の連鎖率を用いると

$$\frac{dT^{\alpha}{}_{\beta}}{d\tau} = \frac{\partial T^{\alpha}{}_{\beta}}{\partial x^{\gamma}}\frac{dx^{\gamma}}{d\tau} = T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}U^{\gamma}, \tag{3.155}$$

であるから、

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{d\tau} = (T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}\,\tilde{\omega}^{\beta}\otimes\vec{e}_{\alpha})U^{\gamma}, \tag{3.156}$$

となる。左辺は式 (3.153) からわかるように $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ テンソルの差として定義されているから $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ テンソルである。一方、右辺を見ると、$T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}\,\tilde{\omega}^{\beta}\otimes\vec{e}_{\alpha}$ が四元速度ベクトル $\vec{U}$ の成分を受け取ることで左辺の $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ テンソルを構成している。つまり、$T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}\,\tilde{\omega}^{\beta}\otimes\vec{e}_{\alpha}$ は何らかの $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ テンソルの成分とみなすことができる。実際、

$$\nabla\boldsymbol{T} = T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}\,\tilde{\omega}^{\beta}\otimes\tilde{\omega}^{\gamma}\otimes\vec{e}_{\alpha}, \tag{3.157}$$

という $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ テンソルを考えよう。これは 2 つのベクトルと 1 つの一形式を引数として実数を与える線形な関数であるから、

$$\nabla\boldsymbol{T}(\ \ ,\ \ ,\ \ ), \tag{3.158}$$

と書くことができる。ここで 1 つ目の引数は一形式 (添字 α に対応)、2 つ目と 3 つ目の引数はベクトル (添字 β,γ に対応) を代入するスロットである。2 つ目のスロットにベクトル $\vec{U}$ を入れると

$$\nabla\boldsymbol{T}(\ \ ,\vec{U},\ \ ), \tag{3.159}$$

となる。この量は、ベクトル $\vec{U}$ を固定すると、1 つの一形式と 1 つのベクトルを引数として実数を返す線形な関数であるから $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ テンソルである。これら 2 つのスロットに基底一形式 $\tilde{\omega}^{\beta}$ と基底ベクトル $\vec{e}_{\alpha}$ を入れると、勾配の成分 $T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}U^{\gamma}$ が得られる。そして、3 つのスロットを持つ $\nabla\boldsymbol{T}(\ \ ,\ \ ,\ \ )$ は $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ テンソルである。ここで $\tilde{d}\boldsymbol{T}$ ではなく $\nabla\boldsymbol{T}$ という記号を用いたのは、前者の記号が通常別の用途に使用されるという理由による。また、

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{d\tau} := \nabla_{\vec{U}}\boldsymbol{T}, \tag{3.160}$$

$$\nabla_{\vec{U}}\boldsymbol{T} \underset{\mathcal{O}}{\rightarrow} \left\{T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}U^{\gamma}\right\}, \tag{3.161}$$

という記法も用いられる。

以上の議論は基底一形式および基底ベクトルが至る所で一定という事実を用いている。これは特殊相対論にのみ当てはまる事実であり、一般相対論においてはその仮定を用いることはできず、微分の定義を拡張する必要が出てくる。

4. 完全流体

4.1 流体

本節では特殊相対論における流体について学ぶ。一般に、流体とは連続体の特別な場合である。連続体とは、多数の粒子の集合体であって、各粒子の運動を調べることはできず、単位体積あたりの粒子数・エネルギー密度・運動量密度・圧力・温度といった「平均」量あるいは「巨視的」量によって記述される。

これらの巨視的な物理量は各点各点で変化しうる。したがって、どれくらいの粒子を取って平均化すべきかという問題が起こる。そこで、個々の粒子の運動が問題にならないほど多数の粒子を含み、かつその内部では上記のような巨視的量が一定であると見なせるほどに小さい、粒子の集合体を考える。この集合体を**要素**と言う。

連続体近似では、各要素に密度や温度の値を割り当てる。これら時空間点によって異なる値を持つ密度や温度などの物理量を場と呼ぶ。連続体は時間ごと、場所ごとに異なる場の値を持つ。また、連続体の各々の素片は、その素片と共に動いている慣性系である MCR 系を持っている。

では、流体とは連続体のうちどのような性質を満たすものだろうか。上の議論は気体だけでなく固体にも当てはまる。固体とは剛性を持った連続体であり、剛性とは 2 つの要素の接触面に平行な力に対して逆らおうとする性質のことである。この 2 つの要素の接触面に平行な力 (ずれ) に対して逆らう力が弱いものを**流体**、そうでないものを固体と呼ぶ。ずれに逆らう全ての力がゼロで、近傍の流体要素間の相互作用が圧力のみである流体を**完全流体**と言う。

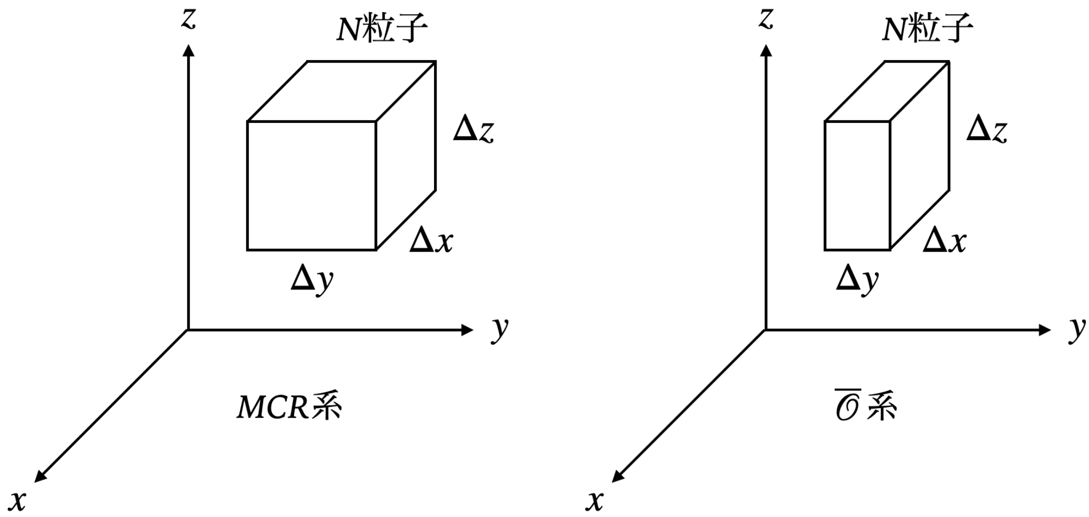


図 29: Lorentz 収縮によって、N 個の粒子を含む要素の体積は変化し、したがって粒子の個数密度は観測者に依存する。

参考文献

[1] B. Schutz, 江里口良治, and 二間瀬敏史, **第 3 版 シュッツ 相対論入門 *I* 特殊相対論**. マルゼン出版, 2023.

[2] 佐藤勝彦, **岩波基礎物理シリーズ【新装版】相対性理論**. 岩波書店, 1996.