演習問題

2024 年 5 月 9 日　　　学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[問 1]　$\hat{p}$ 演算子が任意の状態 $|\Psi\rangle$ に作用した状態 $\hat{p}|\Psi\rangle$ を $|x\rangle$ 表示で見ると、

$$\langle x|\hat{p}|\Psi\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|\Psi\rangle,$$

であった。では、$\hat{x}$ 演算子が $|\Psi\rangle$ に作用した状態 $\hat{x}|\Psi\rangle$ を $|p\rangle$ 表示で見るとどうなるだろうか。

$$\langle p|\hat{x}|\Psi\rangle,$$

に完全性関係 $1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ |x\rangle\langle x|$ を挟み込み、$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar}$ あるいはその複素共役 $\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-ipx/\hbar}$ を用いることで求めよ。

[解 1]

$$\begin{aligned}
\langle p|\hat{x}|\Psi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \langle p|x\rangle\langle x|\hat{x}|\Psi\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-ipx/\hbar}x\langle x|\Psi\rangle \\
&= i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-ipx/\hbar}\langle x|\Psi\rangle \\
&= i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \langle p|x\rangle\langle x|\Psi\rangle \\
&= i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\langle p|\Psi\rangle.
\end{aligned}$$

[問 2]　調和振動子の基底状態は、波動関数が $\Psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ で与えられていた。ブラケット記法では、これは

$$\langle x|\Psi_0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2},$$

を意味する。

(1)　$|p\rangle$ 表示での波動関数 $\langle p|\Psi_0\rangle$ を求めよ。$\langle p|\Psi_0\rangle$ から始め、完全性関係 $1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ |x\rangle\langle x|$ を挟み込み、$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar}$ あるいはその複素共役 $\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-ipx/\hbar}$ を用いるとよい。また、Gauss 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-(x-x_0)^2} = \sqrt{\pi}$ が複素数の x_0 についても成り立つことも用いるとよい。

(2)　(1) で得られた波動関数 $\langle p|\Psi_0\rangle$ が、規格化条件 $\int_{-\infty}^{\infty} dp\ \langle\Psi_0|p\rangle\langle p|\Psi_0\rangle = 1$ を満たしていることを確かめよ。

[解 2]

(1)

$$
\begin{aligned}
\langle p|\Psi_0\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \langle p|x\rangle\langle x|\Psi_0\rangle \\
&\overset{\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-ipx/\hbar}}{=} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ipx/\hbar} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&\overset{\text{平方完成}}{=} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x+\frac{ip}{m\omega}\right)^2} e^{-\frac{p^2}{2\hbar m\omega}} \\
&\overset{\text{Gauss 積分}}{=} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m\omega}} e^{-\frac{p^2}{2\hbar m\omega}} \\
&= \left(\frac{1}{\pi\hbar m\omega}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{p^2}{2\hbar m\omega}}.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dp\ \langle\Psi_0|p\rangle\langle p|\Psi_0\rangle = \sqrt{\frac{1}{\pi\hbar m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} dp\ e^{-\frac{p^2}{\hbar m\omega}} = \sqrt{\frac{1}{\pi\hbar m\omega}} \sqrt{\pi\hbar m\omega} = 1.
$$

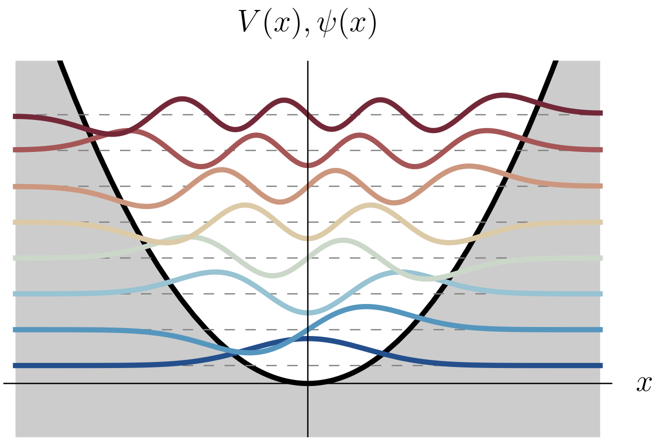

図 1: 調和振動子ポテンシャルと $|x\rangle$ 表示での波動関数。

[問 3]　演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ に対する交換子は

$$
[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A},
$$

で定義される。

(1)　以下の関係式を示せ。

$$
[\hat{A}+\hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}], \qquad [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}.
$$

(2)　$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ と帰納法を用いて、以下の関係式を示せ。

$$
[\hat{x}^n, \hat{p}] = i\hbar n \hat{x}^{n-1}.
$$

(3)　以下の関係式を示せ。関数 $f(x)$ は Taylor 展開可能とする。

$$[f(\hat{x}), \hat{p}] = i\hbar \frac{d}{d\hat{x}} f(\hat{x}).$$

[解 3]

(1)

$$[\hat{A}+\hat{B}, \hat{C}] = (\hat{A}+\hat{B})\hat{C} - \hat{C}(\hat{A}+\hat{B}) = \hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A} - \hat{C}\hat{B} = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}],$$
$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}.$$

(2)　帰納法による。$n=1$ のとき

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar,$$

より成立。$n = k \in \mathbb{N}$ のとき成立すると仮定すると、(1) の結果を用いて

$$[\hat{x}^{k+1}, \hat{p}] = [\hat{x}\hat{x}^k, \hat{p}] = \hat{x}[\hat{x}^k, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{x}^k = \hat{x} i\hbar k \hat{x}^{k-1} + i\hbar \hat{x}^k = i\hbar(k+1)\hat{x}^k,$$

であるから、$n = k+1$ でも成立。

(3)　Taylor 展開可能であるという仮定、および (2) の結果を用いて

$$\begin{aligned}[f(\hat{x}), \hat{p}] &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\hat{x}^n, \hat{p}\right] \overset{[1,\hat{p}]=0}{=} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\hat{x}^n, \hat{p}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) i\hbar n \hat{x}^{n-1} = i\hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(0)\hat{x}^{n-1} = i\hbar \frac{d}{d\hat{x}} f(\hat{x}).\end{aligned}$$

[問 4]　運動量演算子 $\hat{p}$ の性質として、 この演算子を定数倍して e の肩に乗せた演算子 $e^{i\hat{p}a/\hbar} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{ia}{\hbar}\right)^n \hat{p}^n$ が任意の状態 $|\Psi\rangle$ に掛かると、$|x\rangle$ で見たときに a だけの推進を引き起こしている、つまり $\langle x|\Psi\rangle$ の x を $x+a$ に置き換えたものに相当している

$$\langle x| e^{i\hat{p}a/\hbar} |\Psi\rangle = \langle x+a|\Psi\rangle,$$

ことを示せ。$\hat{p}$ 演算子が任意の状態 $|\Psi\rangle$ に作用した状態 $\hat{p}|\Psi\rangle$ を $|x\rangle$ 表示で見ると、

$$\langle x|\hat{p}|\Psi\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \langle x|\Psi\rangle,$$

であることを用いるとよい。

[解 4]

$$
\begin{aligned}
\langle x| e^{i\hat{p}a/\hbar} |\Psi\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{ia}{\hbar}\right)^n \langle x| \hat{p}^n |\Psi\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{ia}{\hbar}\right)^n \langle x| \hat{p} \cdot \hat{p}^{n-1} |\Psi\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{ia}{\hbar}\right)^n \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \langle x| \hat{p}^{n-1} |\Psi\rangle \\
&= \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{ia}{\hbar}\right)^n \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^n \langle x|\Psi\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \langle x|\Psi\rangle \\
&\overset{x\ \text{周りでの Maclaurin 展開}}{=} \langle x+a|\Psi\rangle,
\end{aligned}
$$

より示される。この結果が妥当であることは、上式において a が微小であるとすると

$$
\langle x| \left(1 + \frac{ia\hat{p}}{\hbar}\right) |\Psi\rangle = \langle x|\Psi\rangle + a \frac{\partial}{\partial x} \langle x|\Psi\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad \langle x| \hat{p} |\Psi\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \langle x|\Psi\rangle,
$$

となることからもわかる。この意味で、$\hat{p}$ は $|x\rangle$ 表示での微小推進を引き起こす、と言う。