

量子力学I 中間レポート

提出期限: 2024年6月9日 / 提出先: 理学研究科Y棟B230 レポートボックス or jinno@phys.sci.kobe-u.ac.jp

学籍番号 _____ 氏名 _____

以下の問いに答えよ。計算過程を適宜記述すること。100点以上を得た場合、得点は100点に調整される。

本講義では、まず量子論の発見に至るまでの過程を説明した。粒子のエネルギー E および運動量 p が波の角振動数 ω および波数 k と

$$\text{粒子に関連する量} \left\{ \begin{array}{l} E = \hbar\omega \\ p = \hbar k \end{array} \right\} \text{波に関連する量}$$

によって関連付いているという示唆、および粒子のエネルギーと運動量についての関係式 $E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ から、 $e^{i(kx - \omega t)}$ に成り立つ方程式の一般化として時間に依存する Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, x) = H\Psi(t, x), \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x),$$

を推測した。ここで \hbar は換算 Planck 定数 $\hbar := \frac{h}{2\pi}$ であり、Planck 定数は $h \approx 6.63 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s}$ である。これについて以下の問いに答えよ。

[問 1] (配点: 5 + 5 + 5)

- (1) $\lambda = \frac{h}{p}$ を de Broglie 波長と言う。速度 $v = 1.00 \times 10^6 \text{ m/s}$ で動いている金属中の電子の de Broglie 波長を有効数字 2 桁で求めよ。電子の質量は $m \approx 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ である。
- (2) 宇宙空間は温度 $T \approx 2.73 \text{ K}$ の分布を持つ光子で満たされていることが知られている^a(宇宙背景放射 = Cosmic Microwave Background)。温度 T の分布を持つ光子の単位周波数あたりのエネルギー密度 $U(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \right)^{-1}$ が $h\nu \approx 2.82 k_B T$ でピークを取ることを用いて、このピークに対応する周波数 ν 、波長 λ 、およびエネルギー E を有効数字 2 桁で求めよ。光速は $c \approx 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$ 、ボルツマン定数は $k_B \approx 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ である。
- (3) 原子核の大きさ a は $a \approx 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ 程度である。原子核の構造を光子を用いて調べるには、光子の波長が原子核の大きさ程度かそれ以下でないといけない。光子にどの程度のエネルギーが必要か、オーダー評価で求めよ。

^a Planck 衛星による宇宙背景放射の精密測定により、インフレーション理論の性質が絞り込まれている [1]。

[問 2] (配点: 5 + 5 + 5 + 5)

時刻 $t = 0$ における波動関数が

$$\Psi(t = 0, x) = A e^{\frac{ip_0 x}{\hbar} - \frac{x^2}{2a^2}},$$

で与えられているとする。ただし A, a は正の定数であり、 p_0 は実数の定数である。

- (1) 規格化条件 $\int_{-\infty}^{\infty} dx |\Psi(t, x)|^2 = 1$ より、 A を他の定数で表せ。
- (2) この時刻における $\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle, \sigma_x := \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$ を求めよ。ただし、 x の任意の関数 $f(x)$ の時刻 t における期

期待値は $\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(t, x) f(x) \Psi(t, x)$ で与えられる。

(3) この時刻における $\langle p \rangle, \langle p^2 \rangle, \sigma_p := \sqrt{\langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle}$ を求めよ。ただし、 p の任意の関数 $f(p)$ の時刻 t における期待値は $\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(t, x) f(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \Psi(t, x)$ で与えられる。

(4) この時刻において不確定性関係 $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$ が満たされていることを示せ。

本講義では次に、時間に依存しない Schrödinger 方程式を導入した。上記の時間に依存する Schrödinger 方程式の解は、変数分離型の解 $\Psi(t, x) = \psi(x)\varphi(t)$ の満たす方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t) = E\varphi(t), \quad H\psi(x) = E\psi(x),$$

の解 $\varphi(t) = \varphi_n(t) = e^{-iE_n t/\hbar}$ および $\psi(x) = \psi_n(x)$ の重ね合わせとして $\Psi(t, x) = \sum_n c_n \psi_n(x) \varphi_n(t)$ と書かれる。このうち $H\psi(x) = E\psi(x)$ を時間に依存しない Schrödinger 方程式と呼ぶ。これについて、以下の問いに答えよ。

[問3] (配点: 5 + 5 + 3 + 4 + 3 + 10)

無限井戸型ポテンシャルを考える。解くべき方程式は以下である。

$$H\psi(x) = E\psi(x), \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq a), \\ \infty & (x < 0 \text{ or } a < x). \end{cases}$$

(1) n 番目 ($n = 1, 2, 3, \dots$) の波動関数 $\psi_n(x)$ およびエネルギー固有値 E_n を求めよ。 $\psi_n(x)$ は実数の範囲で考えれば十分である。波動関数は $\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_n(x)|^2 = 1$ で規格化すること。

(2) $\psi_n(x)$ ($n = 1, 2, 3$) の概形を描け。

有限井戸型ポテンシャルを考える。ただし V_0 は正の定数とする。解くべき方程式は以下である。

$$H\psi(x) = E\psi(x), \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad V(x) = \begin{cases} -V_0 & (-a \leq x \leq a), \\ 0 & (x < -a \text{ or } a < x). \end{cases}$$

(3) この系に現れるエネルギー固有状態は (a) 束縛状態のみ、(b) 散乱状態のみ、(c) 束縛状態および散乱状態、のいずれであるか。

(4) $-V_0 < E < 0$ の場合について考える。解を

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{-\kappa x} + Be^{\kappa x} & (x < -a), \\ C \sin(lx) + D \cos(lx) & (-a < x < a), \\ Fe^{-\kappa x} + Ge^{\kappa x} & (a < x), \end{cases}$$

と置こう。ただし κ, l は正とする。それぞれの領域で $\psi(x)$ が Schrödinger 方程式の解であるという条件から、 κ, l を V_0 および E で表せ。

(5) 本問のようにポテンシャルが偶関数 $V(-x) = V(x)$ である場合、 $\psi(x)$ は偶関数 $\psi(-x) = \psi(x)$ または奇関数 $\psi(-x) = -\psi(x)$ の範囲で考えれば十分である。偶関数の $\psi(x)$ を考える場合、 $\psi(x)$ が $x \rightarrow \pm\infty$ で発散しないという条件も合わせて考慮すると、 A, B, C, D, F, G のうち 0 となるものはどれか。

(6) 引き続き偶関数の $\psi(x)$ を考える。波動関数の接続条件から κ と l の間に成り立つ関係式を求めよ。その結果を元に、 $a = \sqrt{\frac{8\hbar^2}{mV_0}}$ の場合に、偶関数の束縛状態の個数を答えよ。

本講義では次に、Schrödinger 方程式を複素 Hilbert 空間 (= 内積が定義され、極限も適切に存在する複素ベクトル空間) の元 $|\Psi(t)\rangle$ に対する方程式として一般化した。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle.$$

$|\Psi(t)\rangle$ は「系の状態」と呼ばれる。この一般化により、例えば Hamiltonian を $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + V(\hat{x})$ とすれば以前の 1 次元空間中の粒子に対する Schrödinger 方程式が得られ、また別の Hamiltonian を考えれば別の系も記述可能であるため、理論の適用範囲が広がった。これについて以下の問いに答えよ。

[問 4] (配点 : 5 + 5 + 10)

2 準位系と呼ばれる、系の状態 $|\Psi(t)\rangle$ が 2 成分ベクトルを取る系を考える。2 つの正規直交基底を

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

とし、Hamiltonian は

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix},$$

で与えられるとする。ここで ϵ は正の実数である。時刻 $t = 0$ において系の初期状態は $|\Psi(t = 0)\rangle = |1\rangle$ である。この系が Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle,$$

に従って発展するとき、任意の時刻 t における状態 $|\Psi(t)\rangle$ を求めたい。

(1) $|\Psi(t)\rangle$ を \hat{H} の固有状態の重ね合わせで表そう。 \hat{H} の固有状態を求める式、すなわち時間に依存しない Schrödinger 方程式

$$\hat{H} |s\rangle = E |s\rangle,$$

を解くことで、2 つの固有値 E_+, E_- および正規化されたエネルギー固有状態 $|s_+\rangle, |s_-\rangle$ を求めよ。

(2) Schrödinger 方程式に左から $\langle s_\pm|$ を掛けることで、 $|s_\pm\rangle$ 表示の波動関数 $\langle s_\pm | \Psi(t) \rangle$ に対する Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle s_\pm | \Psi(t) \rangle = E_\pm \langle s_\pm | \Psi(t) \rangle,$$

が得られる。この微分方程式を解くことで、 $\langle s_\pm | \Psi(t) \rangle$ を初期値 $\langle s_\pm | \Psi(t = 0) \rangle$ を用いて表せ。

(3) 任意の時刻 t における状態 $|\Psi(t)\rangle$ を ϵ を用いて表せ。

本講義では次に、調和振動子の演算子法を取り扱った。これについて以下の問いに答えよ。

[問 5] (配点 : 5 + 5 + 5)

調和振動子に対する時間に依存しない Schrödinger 方程式

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}), \quad V(\hat{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2,$$

を考える。消滅演算子 \hat{a} および生成演算子 \hat{a}^\dagger は

$$\hat{a} := \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(i\hat{p} + m\omega\hat{x}), \quad \hat{a}^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}),$$

で定義される。

(1) \hat{x} と \hat{p} の間に成り立つ正準交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を用いて $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ を求め、また \hat{H} を \hat{a}, \hat{a}^\dagger を用いて表せ。交換子は $[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ で定義される。

(2) 調和振動子の基底状態 (= エネルギー固有値が最低の状態) $|\psi_0\rangle$ は、

$$\hat{a}|\psi_0\rangle = 0,$$

で与えられる。これを $|x\rangle$ 表示することで $\psi_0(x) = \langle x|\psi_0\rangle$ に対する微分方程式を導き、

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2},$$

が得られることを示せ。ただし解は $\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_0(x)|^2 = 1$ により規格化し、規格化定数は正の実数とした。

(3) $|\psi_0\rangle$ に生成演算子を作用させることで、第 1 励起状態 $|\psi_1\rangle$ および第 2 励起状態 $|\psi_2\rangle$ の $|x\rangle$ 表示の波動関数 $\psi_1(x), \psi_2(x)$ を求めよ。ただし解は $\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_n(x)|^2 = 1$ により規格化すること。

以下は発展的内容である。

[問 6] (配点 : 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4)

調和振動子の議論を一般化することで、超対称量子力学 (supersymmetric quantum mechanics = SUSY QM) について学ぼう (文献 [2] 第 2 節)。演算子 \hat{A}, \hat{A}^\dagger を

$$\hat{A} = i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} + W(\hat{x}), \quad \hat{A}^\dagger = -i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} + W(\hat{x}),$$

で定義し、2 種類の Hamiltonian を

$$\hat{H}_1 := \hat{A}^\dagger\hat{A} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_1(\hat{x}), \quad \hat{H}_2 := \hat{A}\hat{A}^\dagger = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_2(\hat{x}),$$

で定義する。 $W(\hat{x})$ は superpotential と呼ばれ、 $(W(\hat{x}))^\dagger = W(\hat{x})$ を満たしているとする。

(1) $V_1(\hat{x}), V_2(\hat{x})$ を $W(\hat{x})$ で表せ。任意の $f(\hat{x})$ に対し $[f(\hat{x}), \hat{p}] = i\hbar f'(\hat{x})$ であることに注意せよ (第 5 回演習)。

(2) $\hat{H}_1|\psi_n^{(1)}\rangle = E_n^{(1)}|\psi_n^{(1)}\rangle$ のとき $\hat{H}_2\hat{A}|\psi_n^{(1)}\rangle = E_n^{(1)}\hat{A}|\psi_n^{(1)}\rangle$ であること、および $\hat{H}_2|\psi_n^{(2)}\rangle = E_n^{(2)}|\psi_n^{(2)}\rangle$ のとき $\hat{H}_1\hat{A}^\dagger|\psi_n^{(2)}\rangle = E_n^{(2)}\hat{A}^\dagger|\psi_n^{(2)}\rangle$ であることを示せ。

この結果は \hat{H}_1 に対する $|\psi_n^{(1)}\rangle$ と \hat{H}_2 に対する $\hat{A}|\psi_n^{(1)}\rangle$ が (0 ベクトルでない限り) 同じ固有値の固有状態として対応し、 \hat{H}_2 に対する $|\psi_n^{(2)}\rangle$ と \hat{H}_1 に対する $\hat{A}^\dagger|\psi_n^{(2)}\rangle$ も同様に (0 ベクトルでない限り) 対応することを示している。

つまり Hamiltonian \hat{H}_1, \hat{H}_2 は、異なるポテンシャルを持つにも関わらず同じエネルギー固有値を持つ。ただし、 $\hat{A}|\psi_n^{(1)}\rangle$ や $\hat{A}^\dagger|\psi_n^{(2)}\rangle$ が 0 ベクトルになってしまう場合は固有ベクトルとして不適格なので、そのような場合は対応する状態がないこともある。

(3) \hat{H}_1 の基底状態 (= エネルギー固有値が最低の状態) を $|\psi_0\rangle$ とする。仮に $\hat{A}|\psi'_0\rangle = 0$ を満たす 0 ベクトルでない状態 $|\psi'_0\rangle$ が存在するとしたら、この $|\psi'_0\rangle$ こそが基底状態 $|\psi_0\rangle$ である。なぜなら、任意の状態 $|\psi\rangle$ に対して $\langle\psi|\hat{H}_1|\psi\rangle = |\hat{A}|\psi\rangle|^2 \geq 0$ であるために \hat{H}_1 の固有値は全て 0 以上である一方、 $\hat{H}_1|\psi'_0\rangle = \hat{A}^\dagger\hat{A}|\psi'_0\rangle = 0|\psi'_0\rangle$ より $|\psi'_0\rangle$ は \hat{H}_1 の固有値 $E_0^{(1)} = 0$ の状態であるからである。さて、基底状態が $\hat{A}|\psi_0\rangle = 0$ を満たすとして、この式を $|x\rangle$ 表示することで、 $W(x)$ を $\psi_0(x)$ を用いて表せ。

(4) $V_1(\hat{x})$ に対する $V_2(\hat{x})$ 、あるいはその逆を、SUSY partner potential と言う。無限井戸型ポテンシャルの SUSY partner potential を求めよう。[問 3](1) で求めた $\psi_1(x)$ が本問の基底状態 $\psi_0(x)$ に相当することに注意して、(3) の結果を使うことによりまず $W(x)$ を求めよ。[問 3](1) で求めた $\psi_1(x)$ は、井戸の深さを定数分だけずらした

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & (0 \leq x \leq a), \\ \infty & (x < 0 \text{ or } a < x). \end{cases}$$

に対しても Schrödinger 方程式の解になっていることに注意して、 $W(x)$ から求めた $V_1(x)$ が上記のポテンシャル形となることを確認し、SUSY partner potential $V_2(x)$ を求めよ。 $0 \leq x \leq a$ の範囲だけ考察すれば十分である。

(5) Hamiltonian \hat{H}_1, \hat{H}_2 および演算子 \hat{A}, \hat{A}^\dagger を 2×2 行列に配置した

$$\hat{H} := \begin{pmatrix} \hat{H}_1 & 0 \\ 0 & \hat{H}_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}^\dagger := \begin{pmatrix} 0 & \hat{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

を考える。交換関係および反交換関係

$$[\hat{H}, \hat{Q}] = [\hat{H}, \hat{Q}^\dagger] = 0, \quad \{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\} = \hat{H}, \quad \{\hat{Q}, \hat{Q}\} = \{\hat{Q}^\dagger, \hat{Q}^\dagger\} = 0,$$

を示せ。交換関係は $[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ 、反交換関係は $\{\hat{A}, \hat{B}\} := \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ で定義される。

(6) superpotential $W(\hat{x})$ によっては、基底状態 $|\psi_0\rangle$ が $\hat{A}|\psi_0\rangle = 0$ を満たさないこともある。実際、 $W(\hat{x}) = g\hat{x}^2 + \hat{x}$ (g は実数) とすると、 $\hat{A}|\psi_0\rangle = 0$ となるような $|\psi_0\rangle$ は存在せず、Hamiltonian \hat{H}_1 の最低エネルギーは $0 < g \ll 1$ に対して $E_0 \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sqrt{2}}{3g^2}}$ 程度の値を持つ。 $W(\hat{x}) = g\hat{x}^2 + \hat{x}$ について $\hat{A}|\psi_0\rangle = 0$ を満たす状態が存在しない理由を

考察せよ (文献 [3] 第 6 節)。このように、 $\hat{A}|\psi_0\rangle = 0$ を満たさない基底状態 (言い換えると、 $\hat{Q} \begin{pmatrix} |\psi_0\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$ となる基底状態) $|\psi_0\rangle$ を SUSY が破れた状態と言う。

参考文献

- [1] Planck Collaboration, Y. Akrami *et al.*, “Planck 2018 results. X. Constraints on inflation,” *Astron. Astrophys.* **641** (2020) A10, [arXiv:1807.06211 \[astro-ph.CO\]](https://arxiv.org/abs/1807.06211).
- [2] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, “Supersymmetry and quantum mechanics,” *Phys. Rept.* **251** (1995) 267–385, [arXiv:hep-th/9405029](https://arxiv.org/abs/hep-th/9405029).
- [3] E. Witten, “Dynamical Breaking of Supersymmetry,” *Nucl. Phys. B* **188** (1981) 513.