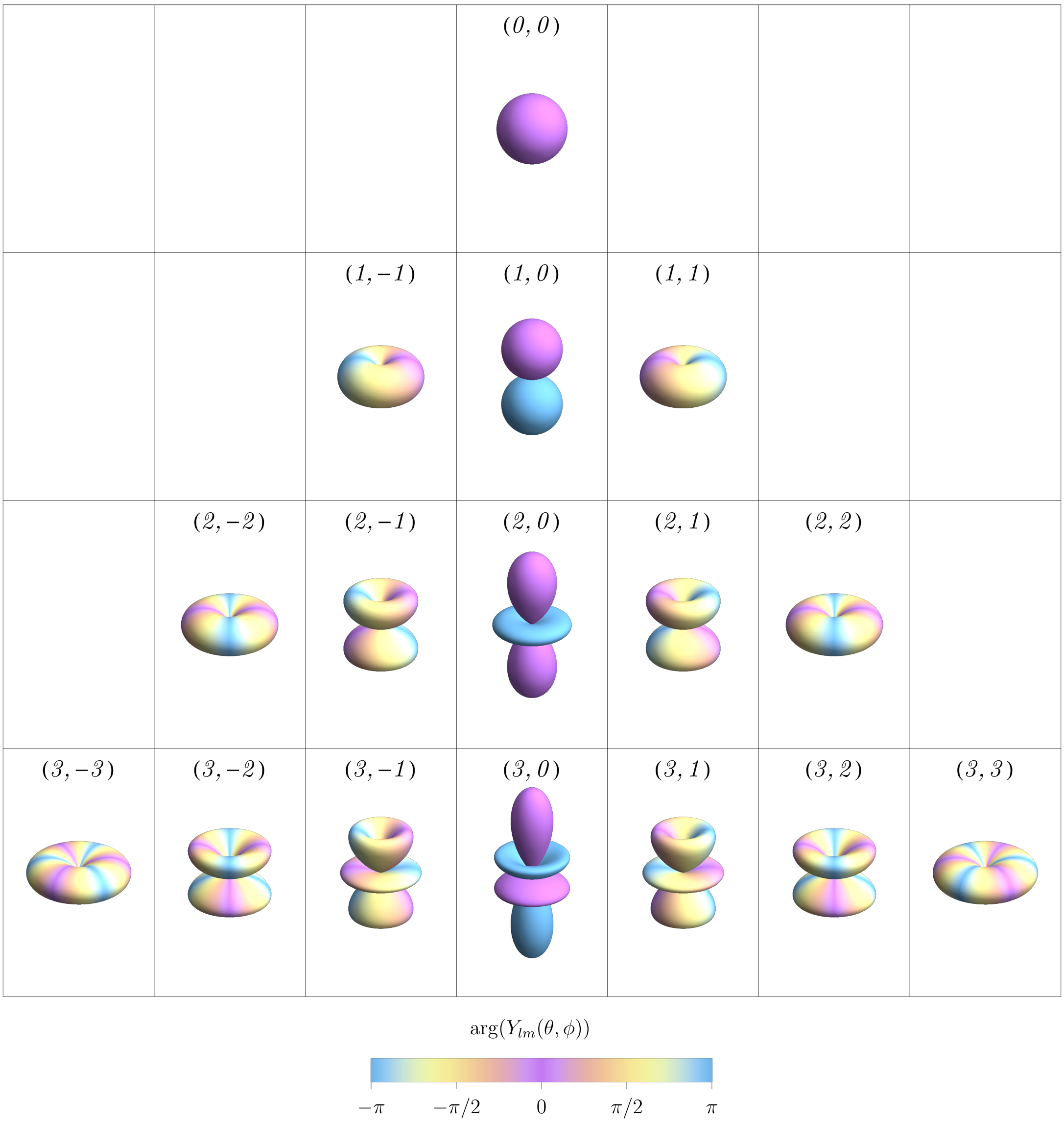
演習問題

2024 年 6 月 6 日　　　学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

[問 1]　球面調和関数 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ $(l \le 3)$ の概形を描け。ただし、各方向 (θ,ϕ) について動径 r が $r = |Y_{lm}(\theta,\phi)|$ となるような面を描くものとし、また $\arg(Y_{lm}(\theta,\phi)) = 0$ および $\arg(Y_{lm}(\theta,\phi)) = \pm\pi$ となる方向を濃淡で示すこと。



[問 2]

(1)　球面調和関数の定義

$$
Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,e^{im\phi}P_l^m(\cos\theta),
$$

を用いて $Y_{00}(\theta,\phi), Y_{21}(\theta,\phi), Y_{32}(\theta,\phi)$ を構成せよ。Legendre 多項式 $P_l(x)$ に対する Rodrigues の公式、および

Legendre 陪関数 $P_l^m(x)$ の定義

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l, \qquad P_l^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{d}{dx}\right)^m P_l(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{l+m}(x^2-1)^l,$$

も参照せよ。

(2)　$Y_{00}(\theta,\phi), Y_{21}(\theta,\phi)$ が

$$\int d\Omega\ Y_{lm}^*(\theta,\phi)Y_{l'm'}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'},$$

の意味で規格直交化されていることを確かめよ。ここで $\int d\Omega = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$ である。

(3)　$Y(\theta,\phi) = Y_{21}(\theta,\phi)$ が $l=2$ に対する角度方向の Schrödinger 方程式

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y(\theta,\phi)\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y(\theta,\phi) = -l(l+1)Y(\theta,\phi),$$

を満たしていることを確認せよ。

[問 3]

3 次元無限井戸型ポテンシャルの下での動径方向の Schrödinger 方程式

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R(r)\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E]R(r) = l(l+1)R(r), \qquad V(r) = \begin{cases} 0 & (r \le a), \\ \infty & (r > a), \end{cases}$$

を考える。整数 $l \ge 0$ は与えられているものとする。

(1)　有効ポテンシャル $V_{\rm eff}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}$ は常に正であるから、エネルギーの範囲としては $E > 0$ を考えればよい。1 次元 Schrödinger 方程式と同様に $k := \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ を用いると、動径方向の Schrödinger 方程式が $r \le a$ において

$$\frac{d^2}{dr^2}R(r) + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}R(r) + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r) = 0,$$

となることを示せ。

(2)　任意の実数 α に対して、球 Bessel 関数 $j_\alpha(x)$ および球 Neumann 関数 $n_\alpha(x)$ は、次の $f(x)$ に対する球 Bessel 微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) + \frac{2}{x}\frac{d}{dx}f(x) + \left[1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2}\right]f(x) = 0,$$

の 2 つの独立な解を与えるものとして知られている。整数 $\alpha \ge 0$ に対しては、具体形は

$$j_\alpha(x) = (-x)^\alpha\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^\alpha \frac{\sin x}{x}, \qquad n_\alpha(x) = -(-x)^\alpha\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^\alpha \frac{\cos x}{x},$$

を用いて求めることができる。まず、$j_l(kr), n_l(kr)$ が動径方向の Schrödinger 方程式を満たすことを示せ。次に、原点 $r=0$ で $R(r)$ が正則である (発散しない) という条件から、解が球 Bessel 関数 $j_l(kr)$ に限られることを示せ。$\frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}$ を Taylor 展開し、$x \to 0$ で最も発散する項の振る舞いを見るとよい。