演習問題

2024 年 5 月 23 日　　　学籍番号 ____________　　氏名 ____________

[問 1]　調和振動子に対する時間に依存しない Schrödinger 方程式

$$H\psi(x) = E\psi(x), \qquad H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

について、以下の問いに答えよ。

(1)　変数変換

$$\xi := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x, \qquad K := \frac{2E}{\hbar\omega},$$

を行うと、

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + (K - \xi^2)\right]\psi(\xi) = 0,$$

が得られることを示せ。ただし、$\psi(\xi)$ は $\psi(x)$ に $x = x(\xi)$ を代入した $\psi(x(\xi))$ の略記である。

(2)　解を

$$\psi(\xi) = \left(a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots\right)e^{-\xi^2/2} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j e^{-\xi^2/2},$$

と書いたとき、

$$\sum_{j=0}^{\infty}\Big[(j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (K-1)a_j\Big]\xi^j = 0,$$

が得られることを示せ。

(3)　(2) より

$$a_{j+2} = \frac{2j+1-K}{(j+1)(j+2)}a_j \quad (j = 0, 1, \cdots),$$

が得られる。これと $\psi(\xi)$ が発散しないための条件

$$K = 2n + 1 \quad (n \text{ は 0 以上の整数}),$$

より、具体的に $n = 2$ について

$$\psi_2(\xi) \propto (1 - 2\xi^2)e^{-\xi^2/2},$$

が得られることを示せ。規格化定数は求めなくてよい。

[問 2]

(1)　生成消滅演算子は、位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ を用いて

$$\text{消滅演算子 } \hat{a} := \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(i\hat{p} + m\omega\hat{x}), \qquad \text{生成演算子 } \hat{a}^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}),$$

と定義される。$\hat{x}$ と $\hat{p}$ に成り立つ正準交換関係 $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$ を用いて

$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1,$$

を示せ。ただし、任意の演算子 $\hat{A},\hat{B}$ に対して交換子は $[\hat{A},\hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ で定義される。

(2)　調和振動子の Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2,$$

が

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right),$$

と表されることを示せ。

(3)　状態 $|\psi\rangle$ が時間に依存しない Schrödinger 方程式 $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ を満たしているとする。このとき、(1)(2) の結果を使うことにより

$$\hat{H}(\hat{a}|\psi\rangle) = (E - \hbar\omega)(\hat{a}|\psi\rangle),$$
$$\hat{H}(\hat{a}^\dagger|\psi\rangle) = (E + \hbar\omega)(\hat{a}^\dagger|\psi\rangle),$$

となることを示せ。これは、

- $\hat{a}|\psi\rangle$ も Schrödinger 方程式の解であり、エネルギー固有値 $E - \hbar\omega$ の固有ベクトルである
- $\hat{a}^\dagger|\psi\rangle$ も Schrödinger 方程式の解であり、エネルギー固有値 $E + \hbar\omega$ の固有ベクトルである

ことを意味している。ただし、$\hat{a}|\psi\rangle$ も $\hat{a}^\dagger|\psi\rangle$ も 0 ベクトルではないとする。

[問 3]　調和振動子の基底状態 $|\psi_0\rangle$ は、

$$\hat{a}|\psi_0\rangle = 0,$$

で定義される。

(1)　基底状態 $|\psi_0\rangle$ の定義式 $\hat{a}|\psi_0\rangle = 0$ に左から $\langle x|$ を掛け、$\langle x|\hat{x}|\cdots\rangle = x\langle x|\cdots\rangle$ および $\langle x|\hat{p}|\cdots\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|\cdots\rangle$ を用いることにより、$\psi_0(x) = \langle x|\psi_0\rangle$ に対する微分方程式

$$\left(\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right)\psi_0(x) = 0,$$

を導け。

(2)　(1) の微分方程式を解くことで、

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2},$$

が得られることを示せ。