演習問題

2024 年 5 月 16 日　　学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

[問 1]　2 つの正規直交基底

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

で Hamiltonian が

$$\hat{H} = h|1\rangle\langle 1| + g|1\rangle\langle 2| + g|2\rangle\langle 1| + h|2\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix},$$

と与えられる系を考える。ここで g, h は実数である。時刻 $t = 0$ において系の初期状態は $|\Psi(t=0)\rangle = |1\rangle$ である。この系が Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle,$$

に従って発展するとき、任意の時刻 t における状態 $|\Psi(t)\rangle$ を求めたい。

(1)　$\hat{H}$ が Hermite 演算子であることを確かめよ。

(2)　$\hat{H}$ の固有状態の線型結合で元の方程式の解を表したい。

$$\hat{H} |s\rangle = E |s\rangle,$$

を解くことで、2 つの固有値 E_+, E_- および正規化されたエネルギー固有状態 $|s_+\rangle, |s_-\rangle$ を求めよ。

(3)　Schrödinger 方程式に左から $\langle s_\pm|$ を掛けることで、$|s_\pm\rangle$ 表示の波動関数 $\langle s_\pm|\Psi(t)\rangle$ に対する Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle s_\pm|\Psi(t)\rangle = E_\pm \langle s_\pm|\Psi(t)\rangle,$$

が得られることを示せ。また、この微分方程式を解くことで、$\langle s_\pm|\Psi(t)\rangle$ を初期値 $\langle s_\pm|\Psi(t=0)\rangle$ を用いて表せ。

(4)　初期状態が $|\Psi(t=0)\rangle = |1\rangle$ であることを用いて、$\langle s_\pm|\Psi(t=0)\rangle$ を求めよ。

(5)　任意の時刻 t における状態 $|\Psi(t)\rangle$ を g, h を用いて表せ。完全性関係より

$$|\Psi(t)\rangle = |s_+\rangle\langle s_+|\Psi(t)\rangle + |s_-\rangle\langle s_-|\Psi(t)\rangle,$$

であることを用いるとよい。

[問 2]　時刻 $t = 0$ における $|x\rangle$ 表示の波動関数 $\langle x|\Psi(t=0)\rangle = \Psi(t=0, x)$ が

$$\langle x|\Psi(t=0)\rangle = \frac{A}{x^2 + a^2},$$

で与えられているとする。ここで A, a は正の実数とする。必要であれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{1}{(x^2+1)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2},$$

を用いよ。

(1) 規格化条件より A を a で表せ。

(2) $\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle, \sigma_x$ を求めよ。

(3) $|p\rangle$ 表示の波動関数 $\langle p|\Psi(t=0)\rangle$ を求めよ。波動関数の変換則

$$\langle p|\Psi(t=0)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \langle p|x\rangle\langle x|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ipx/\hbar}\langle x|\Psi(t=0)\rangle,$$

および留数積分を用いるとよい。

(4) $\langle p \rangle, \langle p^2 \rangle, \sigma_p$ を求めよ。

(5) 不確定性関係 $\sigma_x\sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$ が成り立っていることを確かめよ。

[問 3]

以下の交換関係を満たす Hermite 演算子の組 $(\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ を考えよう。

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z, \qquad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x, \qquad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y.$$

ただし、交換子は $[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ で定義される。

(1) $\hat{L}^2 := \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ は $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ と交換することを示せ。$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$ を用いるとよい。L_z について示せば他も同様なので、$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$ を示せば十分である。

(2) 不確定性関係

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle\Psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\Psi\rangle\right)^2,$$

を $\hat{A} = \hat{L}_x, \hat{B} = \hat{L}_y$ に適用し、$\sigma_{L_x}\sigma_{L_y}$ の下限を $\langle\Psi|\hat{L}_z|\Psi\rangle$ で表せ。ただし、$|\Psi\rangle$ は任意の状態であり、σ_A^2, σ_B^2 は $\Delta A := \hat{A} - \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle, \Delta B := \hat{B} - \langle\Psi|\hat{B}|\Psi\rangle$ の分散 $\sigma_A^2 := \langle\Psi|(\Delta A)^2|\Psi\rangle, \sigma_B^2 := \langle\Psi|(\Delta B)^2|\Psi\rangle$ である。