演習問題

2024 年 5 月 9 日　　　学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿　　　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

[問 1]　$\hat{p}$ 演算子が任意の状態 $|\Psi\rangle$ に作用した状態 $\hat{p}|\Psi\rangle$ を $|x\rangle$ 表示で見ると、

$$\langle x|\hat{p}|\Psi\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|\Psi\rangle,$$

であった。では、$\hat{x}$ 演算子が $|\Psi\rangle$ に作用した状態 $\hat{x}|\Psi\rangle$ を $|p\rangle$ 表示で見るとどうなるだろうか。

$$\langle p|\hat{x}|\Psi\rangle,$$

に完全性関係 $1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ |x\rangle\langle x|$ を挟み込み、$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar}$ あるいはその複素共役 $\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-ipx/\hbar}$ を用いることで求めよ。

[問 2]　調和振動子の基底状態は、波動関数が $\Psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ で与えられていた。ブラケット記法では、これは

$$\langle x|\Psi_0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2},$$

を意味する。

(1)　$|p\rangle$ 表示での波動関数 $\langle p|\Psi_0\rangle$ を求めよ。$\langle p|\Psi_0\rangle$ から始め、完全性関係 $1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ |x\rangle\langle x|$ を挟み込み、$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar}$ あるいはその複素共役 $\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-ipx/\hbar}$ を用いるとよい。また、Gauss 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-(x-x_0)^2} = \sqrt{\pi}$ が複素数の x_0 についても成り立つことも用いるとよい。

(2)　(1) で得られた波動関数 $\langle p|\Psi_0\rangle$ が、規格化条件 $\int_{-\infty}^{\infty} dp\ \langle\Psi_0|p\rangle\langle p|\Psi_0\rangle = 1$ を満たしていることを確かめよ。

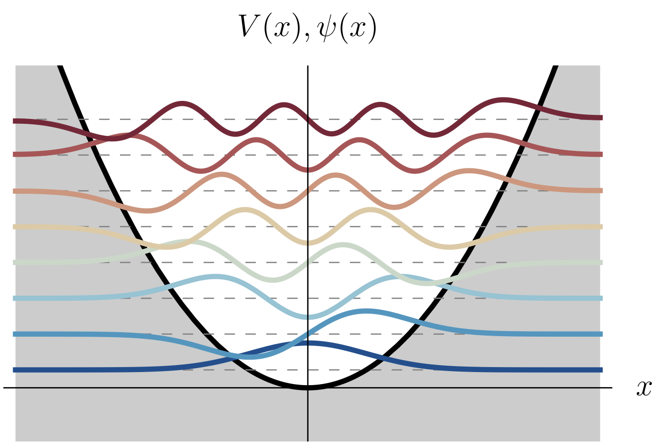

図 1: 調和振動子ポテンシャルと $|x\rangle$ 表示での波動関数。

[問 3]　演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ に対する交換子は

$$[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A},$$

で定義される。

(1) 以下の関係式を示せ。

$$[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}]=[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{B},\hat{C}],\qquad [\hat{A}\hat{B},\hat{C}]=\hat{A}[\hat{B},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{C}]\hat{B}.$$

(2) $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$ と帰納法を用いて、以下の関係式を示せ。

$$[\hat{x}^n,\hat{p}]=i\hbar n\hat{x}^{n-1}.$$

(3) 以下の関係式を示せ。関数 $f(x)$ は Taylor 展開可能とする。

$$[f(\hat{x}),\hat{p}]=i\hbar\frac{d}{d\hat{x}}f(\hat{x}).$$

[問 4] 運動量演算子 $\hat{p}$ の性質として、 この演算子を定数倍して e の肩に乗せた演算子 $e^{i\hat{p}a/\hbar}:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{ia}{\hbar}\right)^n\hat{p}^n$ が任意の状態 $|\Psi\rangle$ に掛かると、$|x\rangle$ で見たときに a だけの推進を引き起こしている、つまり $\langle x|\Psi\rangle$ の x を $x+a$ に置き換えたものに相当している

$$\langle x|e^{i\hat{p}a/\hbar}|\Psi\rangle=\langle x+a|\Psi\rangle,$$

ことを示せ。$\hat{p}$ 演算子が任意の状態 $|\Psi\rangle$ に作用した状態 $\hat{p}|\Psi\rangle$ を $|x\rangle$ 表示で見ると、

$$\langle x|\hat{p}|\Psi\rangle=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|\Psi\rangle,$$

であることを用いるとよい。