演習問題

2024 年 4 月 18 日　　学籍番号 ____________　　氏名 ____________

[問 1]

時刻 $t = 0$ において、粒子の波動関数が 2 つの定常状態の重ね合わせ

$$\Psi(t=0,x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x),$$

にあったとする。$\psi_1(x), \psi_2(x)$ のエネルギーを E_1, E_2 とし、簡単のため c_1, c_2 は実数とする。一般の時刻 t における波動関数 $\Psi(t,x)$ を書き下せ。また、一般の時刻 t において位置 x に粒子を見出す確率密度 $|\Psi(t,x)|^2$ を書き下し、その振る舞いを見ることで、この状態は定常状態かどうか判定せよ。

[問 2]

空間 1 次元においては、束縛状態に**縮退 (degeneracy)** がないことを背理法により示そう。縮退とは、2 つ (あるいはそれ以上) の異なる波動関数 $\psi_n(x)$ が同じエネルギー固有値を持つことである。「異なる波動関数」という用語について、波動関数 $\psi_1(x), \psi_2(x)$ が定数倍の違いのみであれば同じ波動関数とする。以下の方針に従うとよい。まず、異なる 2 つの波動関数を $\psi_1(x), \psi_2(x)$ とする。時間に依存しない Schrödinger 方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi_1(x) = E_1\psi_1(x), \qquad \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi_2(x) = E_2\psi_2(x),$$

であるが、縮退がある場合

$$\frac{\frac{d^2}{dx^2}\psi_1(x)}{\psi_1(x)} = \frac{\frac{d^2}{dx^2}\psi_2(x)}{\psi_2(x)},$$

となることを示し、これと各固有関数が無限遠で 0 であることから $\psi_1(x) \propto \psi_2(x)$ を導き、矛盾を示せ。

[問 3]

調和振動子

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2.$$

について、励起状態の波動関数を求めよう。

$$\xi := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x,$$

を導入すると、波動関数 $\Psi(t,x) = \psi(x)\varphi(t)$ の $\psi(x)$ 部分について、

$$\psi(\xi) = \left(a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots\right)e^{-\xi^2/2},$$

と展開したときの係数が漸化式

$$a_{j+2} = \frac{(2j+1)-K}{(j+1)(j+2)}a_j \quad (j = 0, 1, \cdots),$$

を満たすことを見た。さらに、波動関数が発散しないためには

$$K = 2n + 1 \quad (n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0),$$

でなければならないことも見た。さて、この漸化式を用いて $\psi_5(x)$ および $\psi_6(x)$ を求めよ。規格化定数は求めなくてよい。また、それらが Hermite 多項式 $H_n(\xi)$ に対する Rodrigues の公式

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}, \qquad H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^n e^{-\xi^2}.$$

を用いて求めた $\psi_5(\xi)$ および $\psi_6(\xi)$ に比例することを確認せよ。

[問 4]

調和振動子の基底状態 $\psi_0(\xi)$ について、波動関数が古典的には禁止されている領域 ($E_0 < V(x)$ となる領域) にも分布していることがわかる。粒子の位置を測定したとき、この古典的な禁止領域に粒子を見つける確率はいくらか、図 1 を参考に大まかに見積もれ。

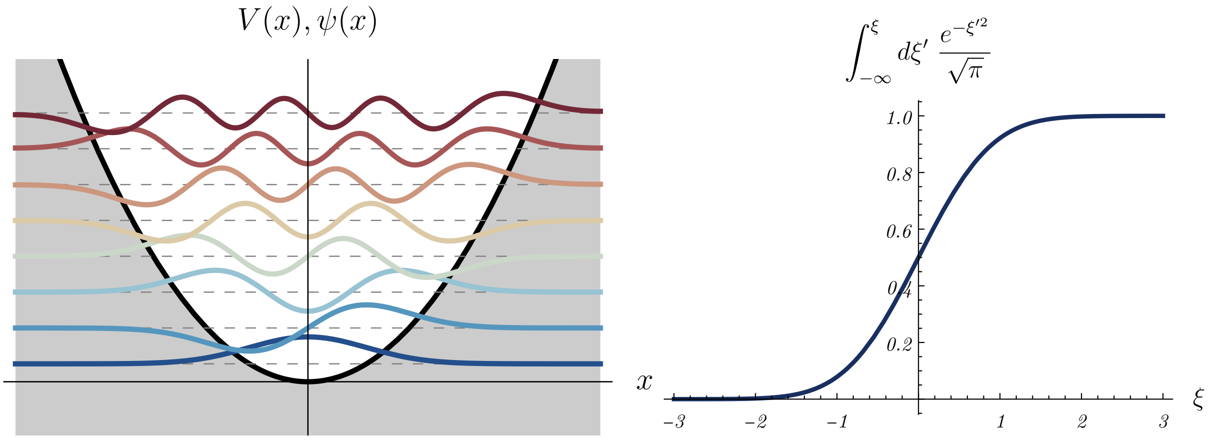

図 1: 調和振動子ポテンシャル (左)、および [問 4] の参考図 (右)。