演習問題

2024 年 7 月 18 日　　　学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿　　　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

[問 1]　スピン角運動量の合成について、交換する演算子の組を理解しよう。以下のように、粒子 1, 粒子 2 に対応した 2 種類のスピン演算子を導入する

$$\text{粒子 1}: \hat{\boldsymbol{S}}_1 = \begin{pmatrix} \hat{S}_{1x} \\ \hat{S}_{1y} \\ \hat{S}_{1z} \end{pmatrix}, \qquad \text{粒子 2}: \hat{\boldsymbol{S}}_2 = \begin{pmatrix} \hat{S}_{2x} \\ \hat{S}_{2y} \\ \hat{S}_{2z} \end{pmatrix}.$$

粒子 1 と粒子 2 のスピン演算子は $[\hat{S}_{1i}, \hat{S}_{2j}] = 0 \ (i, j = x, y, z)$ および $[\hat{S}_{1i}, \hat{S}_{1j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{S}_{1k}$, $[\hat{S}_{2i}, \hat{S}_{2j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{S}_{2k} \ (i, j, k = x, y, z)$ を満たす。また、それぞれについて昇降演算子は $\hat{S}_{1\pm} := \hat{S}_{1x} \pm i\hat{S}_{1y}$, $\hat{S}_{2\pm} = \hat{S}_{2x} \pm i\hat{S}_{2y}$ で定義される。このとき、粒子 1, 2 を合わせたスピン演算子

$$\hat{\boldsymbol{S}} = \begin{pmatrix} \hat{S}_x \\ \hat{S}_y \\ \hat{S}_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \hat{S}_{1x} + \hat{S}_{2x} \\ \hat{S}_{1y} + \hat{S}_{2y} \\ \hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z} \end{pmatrix} = \hat{\boldsymbol{S}}_1 + \hat{\boldsymbol{S}}_2,$$

について、以下の問いに答えよ。

(1)　全スピン角運動量の二乗が

$$\hat{\boldsymbol{S}}^2 = \hat{\boldsymbol{S}}_1^2 + \hat{\boldsymbol{S}}_2^2 + \hat{S}_{1+}\hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-}\hat{S}_{2+} + 2\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z},$$

と書けることを示せ。

(2)　$\hat{\boldsymbol{S}}^2$ と $\hat{\boldsymbol{S}}_1^2$ および $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ と $\hat{\boldsymbol{S}}_2^2$ が交換することを示せ。

(3)　$\hat{\boldsymbol{S}}^2$ と $\hat{S}_{1z}$ および $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ と $\hat{S}_{2z}$ が交換しないことを示せ。

[問 2]　スピン $\frac{1}{2}$ の合成を復習しよう。

(1)　まず

$$|1, 1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle,$$

から始めて、$\hat{S}_- = \hat{S}_{1-} + \hat{S}_{2-}$ を作用させることにより $|1, 0\rangle$ および $|1, -1\rangle$ を合成前の状態 $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ で表せ。ここで $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ は略記

$$|\uparrow\uparrow\rangle := \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle, \qquad |\uparrow\downarrow\rangle := \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \qquad |\downarrow\uparrow\rangle := \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle, \qquad |\downarrow\downarrow\rangle := \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle,$$

であり、また昇降演算子の作用は

$$\hat{S}_\pm |s, m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}\,|s, m \pm 1\rangle,$$

である。

(2)　次に、残りの状態

$$|0,0\rangle,$$

が $|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle$ のいずれとも直交していることを利用し、$|0,0\rangle$ を合成前の状態 $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ で表せ。

[問 3]　波動関数 $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ が荷電粒子の時間に依存する Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\boldsymbol{x}) = H\Psi(t,\boldsymbol{x}), \qquad H = \frac{1}{2m}(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}))^2 + q\varphi(t,\boldsymbol{x}),$$

の解であるとき、

$$\Psi'(t,\boldsymbol{x}) := e^{\frac{iq\Lambda(t,\boldsymbol{x})}{\hbar}}\Psi(t,\boldsymbol{x}),$$

で定義される $\Psi'(t,\boldsymbol{x})$ は、実関数 $\Lambda(t,\boldsymbol{x})$ を用いて

$$\varphi'(t,\boldsymbol{x}) := \varphi(t,\boldsymbol{x}) - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda(t,\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{A}'(t,\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\nabla}\Lambda(t,\boldsymbol{x})$$

と定義される $\varphi'(t,\boldsymbol{x})$ および $\boldsymbol{A}'(t,\boldsymbol{x})$ の下での荷電粒子の Schrödinger 方程式を満たしていることを示せ。

[問 4]　実際の水素原子では、陽子も電子もスピン $\frac{1}{2}$ の粒子なので、それぞれの $\hat{S}_z$ の固有値 $\pm\frac{\hbar}{2}$ に対応する $2\times 2 = 4$ つのエネルギー準位が基底状態 $(n,l,m) = (1,0,0)$ に存在している。しかし実際には、陽子の磁気モーメントと電子の磁気モーメントの相互作用により、この 4 つのエネルギー準位はスピン一重項と三重項の間で分裂している。このエネルギー準位の分裂を超微細構造と言う。磁気モーメント間の相互作用によるエネルギーを考えることにより、超微細構造が

$$\Delta E \sim \alpha^4 \frac{m_e^2}{m_p} c^2,$$

程度のオーダーになることを示せ。