演習問題

2024 年 7 月 11 日　　学籍番号 ____________　　氏名 ____________

[問 1]　Larmor 歳差運動の時間発展を計算しよう。Hamiltonian および Schrödinger 方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\chi(t)\rangle = \hat{H}|\chi(t)\rangle, \qquad \hat{H} = -\gamma\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{B},$$

で与えられ、外部から印加された磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は

$$B_x = 0, \qquad B_y = 0, \qquad B_z = B_0,$$

とする。また、スピン演算子は

$$\hat{S}_x \overset{表示}{=} \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{S}_y \overset{表示}{=} \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{S}_z \overset{表示}{=} \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

で与えられる。

(1)　Hamiltonian の固有状態が

$$|\chi_+\rangle \overset{表示}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\chi_-\rangle \overset{表示}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

で与えられることを示し、対応するエネルギー固有値を求めよ。

(2)　初期状態

$$|\chi(t=0)\rangle \overset{表示}{=} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ e^{i\delta}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix},$$

に対し、一般の時刻 t における状態 $|\chi(t)\rangle$ を求めよ。

(3)　時刻 t におけるスピンの期待値 $\langle\chi(t)|\hat{S}_x|\chi(t)\rangle, \langle\chi(t)|\hat{S}_y|\chi(t)\rangle, \langle\chi(t)|\hat{S}_z|\chi(t)\rangle$ を求め、歳差運動の角振動数を求めよ。また、時刻 t において $\hat{S}_x$ を測定したとき、測定値 $+\frac{\hbar}{2}$ を得る確率および $-\frac{\hbar}{2}$ を得る確率をそれぞれ求めよ。

[問 2]　Stern-Gerlach の実験を Schrödinger 方程式から記述しよう。以下、空間は x, z 方向だけを考える。Hamiltonian および Schrödinger 方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle, \qquad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \gamma\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{B},$$

で与えられ、$\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_z^2$ である。また $\boldsymbol{B}$ は外部から印加された磁束密度であり、B_0, α を定数として

$$B_x = -\alpha x, \qquad B_z = B_0 + \alpha z,$$

とする。空間に関しては $\{|x,z\rangle\}$ 表示、スピンに関しては $\{|\chi_\pm\rangle\}$ 表示を用いると、

$$|\Psi(t)\rangle \overset{\text{表示}}{=} \begin{pmatrix} \Psi_+(t,x,z) \\ \Psi_-(t,x,z) \end{pmatrix}, \qquad \hat{p}_x \overset{\text{表示}}{=} -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \hat{p}_z \overset{\text{表示}}{=} -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \hat{S}_x \overset{\text{表示}}{=} \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{S}_z \overset{\text{表示}}{=} \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

であることに注意して、以下の問いに答えよ。

(1) 上記の表示を Schrödinger 方程式に代入することにより、$\Psi_\pm(t,x,z)$ に対する方程式を導け。

(2) (1) で得られた方程式を簡潔にするため

$$\Psi_\pm(t,x,z) =: e^{\pm\frac{i\gamma B_0 t}{2}}\tilde{\Psi}_\pm(t,x,z),$$

とする。$\tilde{\Psi}_\pm(t,x,z)$ に対する方程式を導け。

(3) B_0 が大きい場合、(2) で求めた方程式のうち $e^{\pm i\gamma B_0 t}$ を含む部分は激しく振動しキャンセルするため無視してよい。このとき、$\tilde{\Psi}_\pm(t,x,z)$ に対する方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\Psi}_\pm(t,x,z) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\tilde{\Psi}_\pm(t,x,z) + V_\pm(x,z)\tilde{\Psi}_\pm(t,x,z),$$

の形に帰着する。$V_\pm(x,z)$ を求め、軌道が分離することを説明せよ。

[問 3] スピン角運動量の合成について、交換する演算子の組を理解しよう。以下のように、粒子 1, 粒子 2 に対応した 2 種類のスピン演算子を導入する

$$\text{粒子 1：}\ \hat{\mathbf{S}}_1 = \begin{pmatrix} \hat{S}_{1x} \\ \hat{S}_{1y} \\ \hat{S}_{1z} \end{pmatrix}, \qquad \text{粒子 2：}\ \hat{\mathbf{S}}_2 = \begin{pmatrix} \hat{S}_{2x} \\ \hat{S}_{2y} \\ \hat{S}_{2z} \end{pmatrix}.$$

粒子 1 と粒子 2 のスピン演算子は $[\hat{S}_{1i},\hat{S}_{2j}] = 0$ $(i,j = x,y,z)$ および $[\hat{S}_{1i},\hat{S}_{1j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{S}_{1k}$, $[\hat{S}_{2i},\hat{S}_{2j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{S}_{2k}$ $(i,j,k = x,y,z)$ を満たす。また、それぞれについて昇降演算子は $\hat{S}_{1\pm} := \hat{S}_{1x} \pm i\hat{S}_{1y}$, $\hat{S}_{2\pm} = \hat{S}_{2x} \pm i\hat{S}_{2y}$ で定義される。このとき、粒子 1, 2 を合わせたスピン演算子

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \hat{S}_x \\ \hat{S}_y \\ \hat{S}_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \hat{S}_{1x}+\hat{S}_{2x} \\ \hat{S}_{1y}+\hat{S}_{2y} \\ \hat{S}_{1z}+\hat{S}_{2z} \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2,$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) 全スピン角運動量の二乗が

$$\hat{\mathbf{S}}^2 = \hat{\mathbf{S}}_1^2 + \hat{\mathbf{S}}_2^2 + \hat{S}_{1+}\hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-}\hat{S}_{2+} + 2\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z},$$

と書けることを示せ。

(2) $\hat{\mathbf{S}}^2$ と $\hat{\mathbf{S}}_1^2$ および $\hat{\mathbf{S}}^2$ と $\hat{\mathbf{S}}_2^2$ が交換することを示せ。

(3) $\hat{\mathbf{S}}^2$ と $\hat{S}_{1z}$ および $\hat{\mathbf{S}}^2$ と $\hat{S}_{2z}$ が交換しないことを示せ。