演習問題

2024 年 7 月 4 日　　学籍番号 ________________　　氏名 ________________

[問 1]　全角運動量の二乗に対する表式

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right],$$

を導こう。

(1)　角運動量

$$\boldsymbol{L} = -i\hbar \boldsymbol{r} \times \nabla,$$

に対し、$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ および

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi},$$

を用いて、

$$\boldsymbol{L} = -i\hbar \left(\boldsymbol{e}_\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right),$$

を示せ。

(2)　(1) の結果に、極座標における基底ベクトルと直交座標における基底ベクトルの関係

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_r &= \sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z, \\ \boldsymbol{e}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y - \sin\theta\,\boldsymbol{e}_z, \\ \boldsymbol{e}_\phi &= -\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\,\boldsymbol{e}_y, \end{aligned}$$

を用いると

$$\boldsymbol{L} = -i\hbar \left[\boldsymbol{e}_x \left(-\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\phi}{\tan\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right) + \boldsymbol{e}_y \left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{\tan\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right) + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial\phi} \right],$$

となる。これを用いて、昇降演算子の表式

$$L_\pm = L_x \pm iL_y = \pm\hbar e^{\pm i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm \frac{i}{\tan\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right),$$

を示せ。

(3)　昇降演算子の積が

$$L_\pm L_\mp = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\tan^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \pm i \frac{\partial}{\partial\phi} \right),$$

となることを示し、$L^2 = L_\pm L_\mp + L_z^2 \mp \hbar L_z$ と合わせて

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right],$$

を示せ。

[問 2]　スピン演算子 $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ が Pauli 行列

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

を用いて

$$\hat{S}_x \overset{\text{表示}}{=} \frac{\hbar}{2}\sigma_x, \qquad \hat{S}_y \overset{\text{表示}}{=} \frac{\hbar}{2}\sigma_y, \qquad \hat{S}_z \overset{\text{表示}}{=} \frac{\hbar}{2}\sigma_z,$$

と与えられている。

(1)　Pauli 行列が

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + i \sum_l \epsilon_{jkl} \sigma_l,$$

を満たすことを示せ。ここで **Levi-Civita 記号** ϵ_{jkl} は

$$\epsilon_{jkl} := \begin{cases} +1 & (j,k,l) = (1,2,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2), \\ -1 & (j,k,l) = (1,3,2),\ (2,1,3),\ (3,2,1), \\ 0 & \text{他}, \end{cases}$$

で定義される。

(2)　スピン演算子の満たすべき交換関係

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar \hat{S}_z, \qquad [\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar \hat{S}_x, \qquad [\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar \hat{S}_y,$$

が満たされていることを、行列を計算することにより示せ。

[問 3]　電子のスピン状態 $|\chi\rangle$ が

$$|\chi\rangle \overset{\text{表示}}{=} A \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix},$$

で与えられているとする。

(1)　状態 $|\chi\rangle$ を規格化することで定数 A を求めよ。ただし A は正の実数とする。

(2)　この状態に対するスピン $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ の期待値を求めよ。ただし $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ は [問 2] のように与えられているとする。

(3)　分散 $\sigma^2_{S_x}, \sigma^2_{S_y}, \sigma^2_{S_z}$ の平方根 $\sigma_{S_x}, \sigma_{S_y}, \sigma_{S_z}$ を求めよ。

(4)　不確定性関係

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle \chi | [\hat{A}, \hat{B}] | \chi \rangle \right)^2,$$

が $\hat{A} = \hat{S}_x, \hat{B} = \hat{S}_y$ に対して成り立っていることを示せ。