演習問題

2024 年 6 月 27 日　　学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

[問 1]　角運動量演算子について、以下の問に答えよ。

(1)　$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$, $[\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar$, $[\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar$ を用いて、交換関係

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z, \qquad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x, \qquad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y,$$

を示せ。$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z$ についてのみ示せばよい。

(2)　交換関係

$$[\hat{L}_z, \hat{x}] = i\hbar\hat{y}, \qquad [\hat{L}_z, \hat{y}] = -i\hbar\hat{x}, \qquad [\hat{L}_z, \hat{z}] = 0,$$
$$[\hat{L}_z, \hat{p}_x] = i\hbar\hat{p}_y, \qquad [\hat{L}_z, \hat{p}_y] = -i\hbar\hat{p}_x, \qquad [\hat{L}_z, \hat{p}_z] = 0,$$

を示せ。

(3)　交換関係

$$[\hat{L}_z, \hat{r}^2] = 0, \qquad [\hat{L}_z, \hat{p}^2] = 0,$$

を示せ。ただし $\hat{r}^2 := \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2$, $\hat{p}^2 := \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2$ である。

[問 2]　昇降演算子 $\hat{L}_\pm := \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ について、

$$\hat{L}_+ |l, m\rangle = A_l^m |l, m+1\rangle, \qquad \hat{L}_- |l, m\rangle = B_l^m |l, m-1\rangle.$$

に現れる定数 A_l^m, B_l^m を以下の手続きで求めよ。ただし状態 $|l, m\rangle$, $|l, m \pm 1\rangle$ は規格化されているものとし、A_l^m, B_l^m は正の実数とする。

(1)　昇降演算子が

$$\hat{L}_\pm^\dagger = \hat{L}_\mp,$$

を満たすことを示せ。

(2)　昇降演算子の積が

$$\hat{L}_\mp\hat{L}_\pm = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 \mp \hbar\hat{L}_z,$$

を満たすことを示せ。ただし $\hat{L}^2 := \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ である。

(3)　(2) の結果に左右から $\langle l, m| \cdots |l, m\rangle$ を作用させることで、

$$A_l^m = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \ \left(= \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\right),$$
$$B_l^m = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)} \ \left(= \hbar\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\right),$$

を示せ。

[問 3]　全角運動量の二乗に対する表式

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right],$$

を導こう。

(1)　角運動量

$$\boldsymbol{L} = -i\hbar \boldsymbol{r} \times \nabla,$$

に対し、$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ および

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi},$$

を用いて、

$$\boldsymbol{L} = -i\hbar \left(\boldsymbol{e}_\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right),$$

を示せ。

(2)　(1) の結果に、球座標における基底ベクトルと直交座標における基底ベクトルの関係

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_r &= \sin\theta\cos\phi\, \boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\phi\, \boldsymbol{e}_y + \cos\theta\, \boldsymbol{e}_z, \\
\boldsymbol{e}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\, \boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\phi\, \boldsymbol{e}_y - \sin\theta\, \boldsymbol{e}_z, \\
\boldsymbol{e}_\phi &= -\sin\phi\, \boldsymbol{e}_x + \cos\phi\, \boldsymbol{e}_y,
\end{aligned}$$

を用いると

$$\boldsymbol{L} = -i\hbar \left[\boldsymbol{e}_x \left(-\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\phi}{\tan\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right) + \boldsymbol{e}_y \left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{\tan\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right) + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial\phi} \right],$$

となる。これを用いて、昇降演算子の表式

$$L_\pm = L_x \pm iL_y = \pm\hbar e^{\pm i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm \frac{i}{\tan\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right),$$

を示せ。

(3)　昇降演算子の積が

$$L_\pm L_\mp = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\tan^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \pm i \frac{\partial}{\partial\phi} \right),$$

となることを示し、$L^2 = L_\pm L_\mp + L_z^2 \mp \hbar L_z$ と合わせて

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right],$$

を示せ。