演習問題

2024 年 4 月 11 日　　学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

[問 1]

(1)　Planck 定数の次元を MLT を用いて表せ。MLT とは M = mass(質量)、L = length(長さ)、T = time (時間) を用いた次元の表し方であり、例えば加速度 a は (長さ)/(時間)^2 なので、MLT で表すと $[a] = [\mathrm{LT}^{-2}]$ となる。

(2)　作用 S および角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}$ の次元を MLT を用いて表せ。作用はラグランジアンの時間積分であること、およびラグランジアンはエネルギーと同じ次元を持っていることを用いるとよい。

[問 2]

Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\Psi(t,x),$$

を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x} j(t,x),$$

を示せ。ただし、確率密度と確率流は

$$\rho(t,x) = |\Psi(t,x)|^2, \qquad j(t,x) = \frac{i\hbar}{2m}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\Psi^*(t,x)\right)\Psi(t,x) - \Psi^*(t,x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\Psi(t,x)\right)\right],$$

で定義される。

[問 3]

Schrödinger 方程式の下で、以下の関係式

Ehrenfest の定理

$$\frac{d}{dt}\langle p\rangle = -\left\langle \frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle,$$

を示せ。ただし $\langle p\rangle = \left\langle -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \Psi^*(t,x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(t,x)$ である。これは期待値が古典論の運動方程式に従うことを意味しており、Ehrenfest の定理と呼ばれる。

[問 4]

時刻 $t = 0$ における波動関数が

$$\Psi(t=0,x) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & (-a \le x \le a) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases},$$

と表されているとする。ただし A, a は正の実数とする。

(1) 規格化定数 A を a の関数として表せ。

(2) $\langle x \rangle$ を求めよ。

(3) $\langle p \rangle$ を求めよ。

(4) $\langle x^2 \rangle$ を求めよ。

(5) $\langle p^2 \rangle$ を求めよ。

(6) σ_x^2 を求めよ。

(7) σ_p^2 を求めよ。

(8) 不確定性関係 $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$ が成り立っていることを確かめよ。

Extra problems

[問 5]

時刻 $t=0$ における確率密度 $\rho(t=0,x)$ が

$$\rho(t=0,x) = Ae^{-\lambda(x-a)^2},$$

で与えられているとする。ここで A, a, λ は正の実数である。

(1) 規格化定数 A を求めよ。必要であれば、以下の Gauss 積分の導出のヒント

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\lambda x^2}\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\lambda(x^2+y^2)} = \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-\lambda r^2} = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} d(r^2) \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-\lambda r^2},$$

を用いよ。

(2) 期待値 $\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle$ および分散 σ_x^2 を求めよ。

(3) $\rho(t=0,x)$ のグラフの概形を描け。

[問 6]

波動関数 $\Psi(t,x)$ が

$$\Psi(t,x) = Ae^{-a\left(\frac{mx^2}{\hbar}+it\right)},$$

で与えられているとする。ただし m は考えている粒子の質量であり、A, a は正の実数とする。

(1) 規格化定数 A を a, m の関数として表せ。

(2) どのようなポテンシャル $V(x)$ に対して、上記の波動関数は Schrödinger 方程式の解となっているか。

(3) 任意の時刻 t における期待値 $\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle p \rangle, \langle p^2 \rangle$ を求めよ。

(4) 分散 σ_x^2, σ_p^2 を求め、それらが不確定性関係 $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$ に従っていることを確かめよ。