量子力学I・II　期末試験

2024/8/1(木) 10:40-12:10

I (配点 20 = 5 + 5 + 5 + 5)

問 1　Planck 定数 h の値をオーダー評価で答えよ。単位は J s = kg m^2/s とすること。

問 2　ポテンシャル $V(x)$ の下で 1 次元空間中を運動する質量 m の粒子を考える。この粒子の波動関数 $\Psi(t,x)$ に対する、時間に依存する Schrödinger 方程式を書き下せ。Hamiltonian H は表式に含めないこと。

問 3　交換子の定義 $[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ を用いて $[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A},\hat{C}] + [\hat{A},\hat{B}]\hat{C}$ を示せ。

問 4　以下のいずれか 1 つについて、どのような現象あるいは実験か説明せよ。

(1) Larmor 歳差運動　　(2) Stern-Gerlach の実験　　(3) Aharonov-Bohm 効果

II (配点 20 = 5 + 5 + 10)

1 次元調和振動子を考える。時間に依存しない Schrödinger 方程式は

$$\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle\,, \qquad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \tag{1}$$

である。位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ の交換関係は $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$ で与えられる。

問 1　消滅演算子 $\hat{a}$ および生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ を

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(i\hat{p} + m\omega\hat{x}\right), \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}\right). \tag{2}$$

で定義する。交換関係 $[\hat{a},\hat{a}^\dagger]$ を求めよ。また、Hamiltonian $\hat{H}$ を $\hat{a},\hat{a}^\dagger$ を用いて表せ。いずれも答えのみでよい。

問 2　基底状態 $|\psi_0\rangle$ は $\hat{a}\,|\psi_0\rangle = 0$ で与えられる。これに $|x\rangle$ 表示を用いることにより、基底状態の波動関数 $\psi_0(x) = \langle x|\psi_0\rangle$ の満たすべき微分方程式を書き下し、$\psi_0(x)$ を求めよ。波動関数は規格化し、必要があれば $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ を用いよ。

問 3　コヒーレント状態 $|\lambda\rangle$ を消滅演算子の固有値 λ の固有状態

$$\hat{a}\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle\,, \tag{3}$$

で定義する。ここで λ は一般に複素数であり、$|\lambda\rangle$ は規格化されているとする。位置の分散 $\sigma_x^2 = \langle\lambda|\,(\hat{x} - \langle\lambda|\,\hat{x}\,|\lambda\rangle)^2\,|\lambda\rangle$ および運動量の分散 $\sigma_p^2 = \langle\lambda|\,(\hat{p} - \langle\lambda|\,\hat{p}\,|\lambda\rangle)^2\,|\lambda\rangle$ を計算することで、この状態が不確定性関係の最小値 $\sigma_x\sigma_p = \frac{\hbar}{2}$ を取ることを示せ。

III (配点 20 = 5 + 5 + 5 + 5)

水素原子、すなわち陽子の Coulomb ポテンシャルに束縛された 3 次元空間中の電子を考える。Hamiltonian は

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}, \tag{4}$$

で与えられる。陽子は十分重いものとし、粒子のスピンは無視できるとする。必要があれば極座標での Laplacian の表式

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\boldsymbol{L}^2, \qquad \boldsymbol{L}^2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \tag{5}$$

を用いよ。

問 1 変数分離型の解 $\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$ を仮定し、エネルギーを E としたとき、$R(r)$ および $Y(\theta,\phi)$ の満たすべき方程式を書き下せ。ただし、$Y(\theta,\phi)$ が $\boldsymbol{L}^2$ の固有値 $-l(l+1)$ $(l = 0, 1, 2, \cdots)$ の固有関数であることを用いてよい。

問 2 問 1 の方程式の解は整数 (n, l, m) を用いて指定できる。角度方向は球面調和関数 $Y(\theta,\phi) = Y_{lm}(\theta,\phi)$ であり、動径方向は Bohr 半径 $a = \dfrac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$ を用いて

$$R(r) = R_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}}\left(\frac{2r}{na}\right)^l e^{-\frac{r}{na}} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na}\right), \tag{6}$$

となる。ここで L_{n-l-1}^{2l+1} は Laguerre 陪多項式

$$L_q^p(x) = \frac{(-1)^p}{(p+q)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^p\left[e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^{p+q}\left(e^{-x}x^{p+q}\right)\right], \tag{7}$$

である。波動関数 $\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$ の $0 < r < \infty$ に節はいくつあるか。

問 3 水素原子のエネルギー準位 $E_n = -\dfrac{m_e e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}\dfrac{1}{n^2}$ は n のみで決まり、整数 n は $n = 1, 2, 3, \cdots$、整数 l は $0 \le l \le n-1$、整数 m は $-l \le m \le l$ の範囲を取る。エネルギー E_n に存在する準位の数を n を用いて表せ。

問 4 水素原子において、電荷 e (> 0) の陽子を電荷 Ze $(Z \ge 1)$ の原子核に置き換えたものを水素様原子と言う。水素様原子の (1) Bohr 半径 (2) エネルギー準位 E_n を、問題文を参考に求めよ。

IV (配点 20 = 5 + 5 + 10)

角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{L}_x \ \ \hat{L}_y \ \ \hat{L}_z)^T$ について考える。ここで $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{p}}$ は位置演算子 $\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{x} \ \ \hat{y} \ \ \hat{z})^T$ および運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_x \ \ \hat{p}_y \ \ \hat{p}_z)^T$ であり、交換関係は $[\hat{\boldsymbol{r}}_j, \hat{\boldsymbol{p}}_k] = i\hbar\delta_{jk}$ で与えられる。また、角運動量の二乗を $\hat{\boldsymbol{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ とする。T は転置記号である。

問 1 交換関係 $[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_x]$, $[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_y]$, $[\hat{L}_x, \hat{L}_z]$, $[\hat{L}_y, \hat{L}_z]$ を求めよ。いずれも答えのみでよい。

問 2 昇降演算子 $\hat{L}_+$ および $\hat{L}_-$ を $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ で定義する。交換関係 $[\hat{L}_z, \hat{L}_+]$ および $[\hat{L}_z, \hat{L}_-]$ を計算し、$\hat{L}_\pm$ を用いて表せ。

問 3 交換する Hermite 演算子 $\hat{\boldsymbol{L}}^2$, $\hat{L}_z$ の固有値は整数 l $(l = 0, 1, 2, \cdots)$ および m $(-l \leq m \leq l)$ を用いてそれぞれ $\hbar^2 l(l+1)$ および $\hbar m$ となる。これら演算子の規格化された同時固有状態を $|l, m\rangle$ とする。問 1,2 の結果を用いて以下を示せ。

$$\hat{L}_+ |l, m\rangle \propto |l, m+1\rangle \quad (-l \leq m \leq l-1), \tag{8}$$

$$\hat{L}_- |l, m\rangle \propto |l, m-1\rangle \quad (-l+1 \leq m \leq l). \tag{9}$$

V (配点 20 = 5 + 5 + 10)

スピン $\frac{1}{2}$ の粒子について考える。スピン演算子を $\hat{\boldsymbol{S}} = (\hat{S}_x \ \ \hat{S}_y \ \ \hat{S}_z)^T$ とする。必要があれば、以下の Pauli 行列を用いた表示 $\hat{S}_i = \dfrac{\hbar}{2}\sigma_i$ $(i = x, y, z)$ を用いてよい。

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

問 1 演算子 $\hat{S}_z$ の固有値 $+\frac{\hbar}{2}$ および $-\frac{\hbar}{2}$ の固有状態をそれぞれ $|+\rangle$ および $|-\rangle$ とする。状態 $|+\rangle$ に対し、演算子 $\hat{S}_x$ に対応する物理量を測定する。あり得る測定値と、それを得る確率を全て求めよ。

問 2 この粒子の Hamiltonian が $\epsilon > 0$ を用いて

$$\hat{H} = \epsilon \hat{S}_z \tag{11}$$

で与えられているとする。初期状態を $|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$ とするとき、任意の時刻 t における状態 $|\Psi(t)\rangle$ を $|+\rangle$, $|-\rangle$ を用いて表せ。

問 3 スピン $\frac{1}{2}$ の粒子 2 つからなる系を考える。それぞれの粒子のスピン演算子を $\hat{\boldsymbol{S}}_i = (\hat{S}_{ix} \ \ \hat{S}_{iy} \ \ \hat{S}_{iz})^T$ $(i = 1, 2)$ とし、合成後のスピン演算子を $\hat{\boldsymbol{S}} = (\hat{S}_x \ \ \hat{S}_y \ \ \hat{S}_z)^T = \hat{\boldsymbol{S}}_1 + \hat{\boldsymbol{S}}_2$ とする。Hermite 演算子 $\hat{\boldsymbol{S}}^2$, $\hat{S}_z$, $\hat{\boldsymbol{S}}_1^2$, $\hat{S}_{1z}$, $\hat{\boldsymbol{S}}_2^2$, $\hat{S}_{2z}$ のうち、交換する演算子 4 つの組を 2 通り答えよ。答えのみでよい。

I (配点 20 = 5 + 5 + 5 + 5)

問 1 Planck 定数の値は

$$h \sim 10^{-34}\text{J s}.$$

問 2 時間に依存する Schrödinger 方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\Psi(t,x).$$

問 3 両辺はそれぞれ

$$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A},$$
$$\hat{B}[\hat{A},\hat{C}] + [\hat{A},\hat{B}]\hat{C} = \hat{B}\hat{A}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} + \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{A}\hat{C} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A},$$

となるので示される。

問 4 (1) 磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ を持つ粒子に磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を印加すると、スピンの期待値 $\langle\hat{\boldsymbol{S}}\rangle$ が歳差運動する現象。

(2) 一様でない磁束密度 $\boldsymbol{B}$ 中に磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ を持つ粒子のビームを打ち込むと、スピン $\hat{\boldsymbol{S}}$ の固有値によってビームの軌道が離散的に分離する実験。

(3) 荷電粒子の軌道上で電場 $\mathbf{E}$ および磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が 0 であっても、電磁ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が 0 でなければ、粒子の観測確率の干渉縞に電磁ポテンシャルの影響が現れる現象。

II (配点 20 = 5 + 5 + 10)

問 1 生成消滅演算子の交換関係及び Hamiltonian は

$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1, \qquad \hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right).$$

問 2 基底状態の波動関数は

$$\begin{aligned}
& \hat{a}\,|\psi_0\rangle = 0 \\
\Longrightarrow\quad & \langle x|\,\hat{a}\,|\psi_0\rangle = 0 \\
\Longrightarrow\quad & \langle x|\,(i\hat{p} + m\omega\hat{x})\,|\psi_0\rangle = 0 \\
\Longrightarrow\quad & \left(\hbar\frac{\partial}{\partial x} + m\omega x\right)\langle x|\psi_0\rangle = 0 \\
\Longrightarrow\quad & \frac{\partial}{\partial x}\psi_0(x) + \frac{m\omega x}{\hbar}\psi_0(x) = 0 \\
\Longrightarrow\quad & \psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.
\end{aligned}$$

問 3 生成消滅演算子の定義より

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger \right), \qquad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger \right),$$

である。これを用いて

$$\begin{aligned}
\langle\lambda| \hat{x} |\lambda\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle\lambda| \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger \right) |\lambda\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle\lambda| (\lambda + \lambda^*) |\lambda\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\lambda + \lambda^*), \\
\langle\lambda| \hat{p} |\lambda\rangle &= -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \langle\lambda| \left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger \right) |\lambda\rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \langle\lambda| (\lambda - \lambda^*) |\lambda\rangle \\
&= -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\lambda - \lambda^*), \\
\langle\lambda| \hat{x}^2 |\lambda\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle\lambda| \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger \right)^2 |\lambda\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle\lambda| \left(\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2} \right) |\lambda\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle\lambda| \left(\hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2} + 1 \right) |\lambda\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left[(\lambda + \lambda^*)^2 + 1 \right], \\
\langle\lambda| \hat{p}^2 |\lambda\rangle &= -\frac{\hbar m\omega}{2} \langle\lambda| \left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger \right)^2 |\lambda\rangle \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2} \langle\lambda| \left(\hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2} \right) |\lambda\rangle \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2} \langle\lambda| \left(\hat{a}^2 - 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2} - 1 \right) |\lambda\rangle \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2} \left[(\lambda - \lambda^*)^2 - 1 \right],
\end{aligned}$$

となるから、分散は

$$\begin{aligned}
\sigma_x^2 &= \langle\lambda| \hat{x}^2 |\lambda\rangle - \langle\lambda| \hat{x} |\lambda\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}, \\
\sigma_p^2 &= \langle\lambda| \hat{p}^2 |\lambda\rangle - \langle\lambda| \hat{p} |\lambda\rangle^2 = \frac{\hbar m\omega}{2},
\end{aligned}$$

となり、$\sigma_x\sigma_p = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} = \frac{\hbar}{2}$ が示される。

III (配点 20 = 5 + 5 + 5 + 5)

問 1 $R(r)$ に関しては

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\boldsymbol{L}^2\right)-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]R(r)Y(\theta,\phi)=ER(r)Y(\theta,\phi)$$

$$\Longrightarrow \qquad -\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{1}{R(r)}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}R(r)\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}=E$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}R(r)\right)+\left[\frac{2m_e}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r)=0.$$

$Y(\theta,\phi)$ に関しては問題文より

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]Y(\theta,\phi)=-l(l+1)Y(\theta,\phi).$$

問 2 $L_q^p(x)$ の x の最高次の冪は、$\left(\frac{d}{dx}\right)^{p+q}$ が全て e^{-x} に当たる場合であるから、

$$L_q^p(x)\sim\left(\frac{d}{dx}\right)^p\left[e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^{p+q}\left(e^{-x}x^{p+q}\right)\right]\sim\left(\frac{d}{dx}\right)^p x^{p+q}\sim x^q,$$

である。したがって $L_q^p(x)$ は最高次が x^q であるような多項式で、q 個の節があることが推測される。動径方向の解は $L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na}\right)$ に $r^l e^{-\frac{r}{na}}$ が掛かった関数であるが、後者の関数は節の数を変えない。したがって節の数は $n-l-1$ 個である。

問 3 エネルギー準位 E_n に存在する準位の数は

$$\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{m=-l}^{l}1=\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1)=n^2.$$

問 4 Coulomb ポテンシャルは陽子の電荷 e と電子の電荷 $-e$ から来ていることに注意し、陽子の電荷部分のみ Ze に置き換える。問題文に与えられた表式を用いて、(1) Bohr 半径 $a=\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Zm_ee^2}$ (2) エネルギー準位 $E_n=-\frac{Z^2m_ee^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$ を得る。

IV (配点 20 = 5 + 5 + 10)

問 1 $[\hat{\boldsymbol{L}}^2,\hat{L}_x]=[\hat{\boldsymbol{L}}^2,\hat{L}_y]=0,\ [\hat{L}_x,\hat{L}_z]=-i\hbar\hat{L}_y,\ [\hat{L}_y,\hat{L}_y]=i\hbar\hat{L}_x.$

問 2 $[\hat{L}_z,\hat{L}_\pm]=[\hat{L}_z,\hat{L}_x]\pm i[\hat{L}_z,\hat{L}_y]=-i\hbar\hat{L}_y\mp\hbar\hat{L}_x=\pm\hbar\hat{L}_+.$

問 3 問 1,2 の結果を用いて、

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2\hat{L}_\pm\left|l,m\right\rangle=\hat{L}_\pm\hat{\boldsymbol{L}}^2\left|l,m\right\rangle=\hbar^2l(l+1)\hat{L}_\pm\left|l,m\right\rangle,$$

$$\hat{L}_z\hat{L}_\pm\left|l,m\right\rangle=(\hat{L}_\pm\hat{L}_z\pm\hbar\hat{L}_\pm)\left|l,m\right\rangle=(\hbar m\hat{L}_\pm\pm\hbar\hat{L}_\pm)\left|l,m\right\rangle=\hbar(m\pm1)\hat{L}_\pm\left|l,m\right\rangle,$$

であるから、$\hat{L}_\pm |l,m\rangle$ は $\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_z$ の固有値 $\hbar^2 l(l+1), \hbar(m+1)$ の状態である。したがって

$$\hat{L}_+ |l,m\rangle \propto |l,m+1\rangle \quad (-l \leq m \leq l-1),$$
$$\hat{L}_- |l,m\rangle \propto |l,m-1\rangle \quad (-l+1 \leq m \leq l).$$

となる。

V (配点 $20 = 5 + 5 + 10$)

問 1 $\hat{S}_z$ の固有状態は

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

であり、$\hat{S}_x$ の固有値および固有状態は

$$\text{固有値} + \frac{\hbar}{2}: \quad \text{固有状態}\ |+_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\text{固有値} - \frac{\hbar}{2}: \quad \text{固有状態}\ |-_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

であるから、系の状態は

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+_x\rangle + |-_x\rangle\right),$$

と書ける。Born の確率規則より、測定値および確率は

$$\text{測定値} + \frac{\hbar}{2}: \quad \text{確率}\frac{1}{2},$$
$$\text{測定値} - \frac{\hbar}{2}: \quad \text{確率}\frac{1}{2},$$

である。

問 2 エネルギー固有値および固有状態は

$$\text{固有値}\ E_+ = +\frac{\epsilon\hbar}{2}: \quad \text{固有状態}\ |+\rangle,$$
$$\text{固有値}\ E_- = -\frac{\epsilon\hbar}{2}: \quad \text{固有状態}\ |-\rangle,$$

であり、それぞれ $e^{-\frac{iE_\pm t}{\hbar}}$ で時間発展するから、

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\frac{i\epsilon}{2}t} |+\rangle + e^{\frac{i\epsilon}{2}t} |-\rangle),$$

となる。

問 3 $\{\hat{\boldsymbol{S}}_1^2, \hat{S}_{1z}, \hat{\boldsymbol{S}}_2^2, \hat{S}_{2z}\}$ および $\{\hat{\boldsymbol{S}}^2, \hat{S}_z, \hat{\boldsymbol{S}}_1^2, \hat{\boldsymbol{S}}_2^2\}$.