# 量子力学I・II　期末試験

2024/8/1(木) 10:40-12:10

## I (配点 20 = 5 + 5 + 5 + 5)

問 1 Planck 定数 $h$ の値をオーダー評価で答えよ。単位は J s = kg m$^2$/s とすること。

問 2 ポテンシャル $V(x)$ の下で 1 次元空間中を運動する質量 $m$ の粒子を考える。この粒子の波動関数 $\Psi(t,x)$ に対する、時間に依存する Schrödinger 方程式を書き下せ。Hamiltonian $H$ は表式に含めないこと。

問 3 交換子の定義 $[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ を用いて $[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A},\hat{C}] + [\hat{A},\hat{B}]\hat{C}$ を示せ。

問 4 以下のいずれか 1 つについて、どのような現象あるいは実験か説明せよ。

(1) Larmor 歳差運動　　(2) Stern-Gerlach の実験　　(3) Aharonov-Bohm 効果

## II (配点 20 = 5 + 5 + 10)

1 次元調和振動子を考える。時間に依存しない Schrödinger 方程式は

$$\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle\,, \qquad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \tag{1}$$

である。位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ の交換関係は $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$ で与えられる。

問 1 消滅演算子 $\hat{a}$ および生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ を

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(i\hat{p} + m\omega\hat{x}\right), \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}\right). \tag{2}$$

で定義する。交換関係 $[\hat{a},\hat{a}^\dagger]$ を求めよ。また、Hamiltonian $\hat{H}$ を $\hat{a},\hat{a}^\dagger$ を用いて表せ。いずれも答えのみでよい。

問 2 基底状態 $|\psi_0\rangle$ は $\hat{a}\,|\psi_0\rangle = 0$ で与えられる。これに $|x\rangle$ 表示を用いることにより、基底状態の波動関数 $\psi_0(x) = \langle x|\psi_0\rangle$ の満たすべき微分方程式を書き下し、$\psi_0(x)$ を求めよ。波動関数は規格化し、必要があれば $\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ を用いよ。

問 3 コヒーレント状態 $|\lambda\rangle$ を消滅演算子の固有値 $\lambda$ の固有状態

$$\hat{a}\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle\,, \tag{3}$$

で定義する。ここで $\lambda$ は一般に複素数であり、$|\lambda\rangle$ は規格化されているとする。位置の分散 $\sigma_x^2 = \langle\lambda|\,(\hat{x} - \langle\lambda|\,\hat{x}\,|\lambda\rangle)^2\,|\lambda\rangle$ および運動量の分散 $\sigma_p^2 = \langle\lambda|\,(\hat{p} - \langle\lambda|\,\hat{p}\,|\lambda\rangle)^2\,|\lambda\rangle$ を計算することで、この状態が不確定性関係の最小値 $\sigma_x\sigma_p = \frac{\hbar}{2}$ を取ることを示せ。

## III (配点 20 = 5 + 5 + 5 + 5)

水素原子、すなわち陽子の Coulomb ポテンシャルに束縛された 3 次元空間中の電子を考える。Hamiltonian は

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}, \tag{4}$$

で与えられる。陽子は十分重いものとし、粒子のスピンは無視できるとする。必要があれば極座標での Laplacian の表式

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\boldsymbol{L}^2, \qquad \boldsymbol{L}^2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \tag{5}$$

を用いよ。

問 1 変数分離型の解 $\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$ を仮定し、エネルギーを $E$ としたとき、$R(r)$ および $Y(\theta,\phi)$ の満たすべき方程式を書き下せ。ただし、$Y(\theta,\phi)$ が $\boldsymbol{L}^2$ の固有値 $-l(l+1)$ $(l = 0,1,2,\cdots)$ の固有関数であることを用いてよい。

問 2 問 1 の方程式の解は整数 $(n,l,m)$ を用いて指定できる。角度方向は球面調和関数 $Y(\theta,\phi) = Y_{lm}(\theta,\phi)$ であり、動径方向は Bohr 半径 $a = \dfrac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$ を用いて

$$R(r) = R_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}}\left(\frac{2r}{na}\right)^l e^{-\frac{r}{na}}L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na}\right), \tag{6}$$

となる。ここで $L_{n-l-1}^{2l+1}$ は Laguerre 陪多項式

$$L_q^p(x) = \frac{(-1)^p}{(p+q)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^p\left[e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^{p+q}\left(e^{-x}x^{p+q}\right)\right], \tag{7}$$

である。波動関数 $\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$ の $0 < r < \infty$ に節はいくつあるか。

問 3 水素原子のエネルギー準位 $E_n = -\dfrac{m_e e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}\dfrac{1}{n^2}$ は $n$ のみで決まり、整数 $n$ は $n = 1,2,3,\cdots$、整数 $l$ は $0 \le l \le n-1$、整数 $m$ は $-l \le m \le l$ の範囲を取る。エネルギー $E_n$ に存在する準位の数を $n$ を用いて表せ。

問 4 水素原子において、電荷 $e$ $(>0)$ の陽子を電荷 $Ze$ $(Z \ge 1)$ の原子核に置き換えたものを水素様原子と言う。水素様原子の (1) Bohr 半径 (2) エネルギー準位 $E_n$ を、問題文を参考に求めよ。

## IV (配点 20 = 5 + 5 + 10)

角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{L}_x \;\; \hat{L}_y \;\; \hat{L}_z)^T$ について考える。ここで $\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{p}}$ は位置演算子 $\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{x} \;\; \hat{y} \;\; \hat{z})^T$ および運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_x \;\; \hat{p}_y \;\; \hat{p}_z)^T$ であり、交換関係は $[\hat{\boldsymbol{r}}_j, \hat{\boldsymbol{p}}_k] = i\hbar\delta_{jk}$ で与えられる。また、角運動量の二乗を $\hat{\boldsymbol{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ とする。$T$ は転置記号である。

問 1 交換関係 $[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_x],\ [\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_y],\ [\hat{L}_x, \hat{L}_z],\ [\hat{L}_y, \hat{L}_z]$ を求めよ。いずれも答えのみでよい。

問 2 昇降演算子 $\hat{L}_+$ および $\hat{L}_-$ を $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ で定義する。交換関係 $[\hat{L}_z, \hat{L}_+]$ および $[\hat{L}_z, \hat{L}_-]$ を計算し、$\hat{L}_\pm$ を用いて表せ。

問 3 交換する Hermite 演算子 $\hat{\boldsymbol{L}}^2,\ \hat{L}_z$ の固有値は整数 $l$ $(l = 0, 1, 2, \cdots)$ および $m$ $(-l \leq m \leq l)$ を用いてそれぞれ $\hbar^2 l(l+1)$ および $\hbar m$ となる。これら演算子の規格化された同時固有状態を $|l, m\rangle$ とする。問 1,2 の結果を用いて以下を示せ。

$$\hat{L}_+ |l, m\rangle \propto |l, m+1\rangle \quad (-l \leq m \leq l-1), \tag{8}$$

$$\hat{L}_- |l, m\rangle \propto |l, m-1\rangle \quad (-l+1 \leq m \leq l). \tag{9}$$

## V (配点 20 = 5 + 5 + 10)

スピン $\frac{1}{2}$ の粒子について考える。スピン演算子を $\hat{\boldsymbol{S}} = (\hat{S}_x \;\; \hat{S}_y \;\; \hat{S}_z)^T$ とする。必要があれば、以下の Pauli 行列を用いた表示 $\hat{S}_i = \dfrac{\hbar}{2}\sigma_i$ $(i = x, y, z)$ を用いてよい。

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

問 1 演算子 $\hat{S}_z$ の固有値 $+\frac{\hbar}{2}$ および $-\frac{\hbar}{2}$ の固有状態をそれぞれ $|+\rangle$ および $|-\rangle$ とする。状態 $|+\rangle$ に対し、演算子 $\hat{S}_x$ に対応する物理量を測定する。あり得る測定値と、それを得る確率を全て求めよ。

問 2 この粒子の Hamiltonian が $\epsilon > 0$ を用いて

$$\hat{H} = \epsilon \hat{S}_z \tag{11}$$

で与えられているとする。初期状態を $|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$ とするとき、任意の時刻 $t$ における状態 $|\Psi(t)\rangle$ を $|+\rangle, |-\rangle$ を用いて表せ。

問 3 スピン $\frac{1}{2}$ の粒子 2 つからなる系を考える。それぞれの粒子のスピン演算子を $\hat{\boldsymbol{S}}_i = (\hat{S}_{ix} \;\; \hat{S}_{iy} \;\; \hat{S}_{iz})^T$ $(i = 1, 2)$ とし、合成後のスピン演算子を $\hat{\boldsymbol{S}} = (\hat{S}_x \;\; \hat{S}_y \;\; \hat{S}_z)^T = \hat{\boldsymbol{S}}_1 + \hat{\boldsymbol{S}}_2$ とする。Hermite 演算子 $\hat{\boldsymbol{S}}^2,\ \hat{S}_z,\ \hat{\boldsymbol{S}}_1^2,\ \hat{S}_{1z},\ \hat{\boldsymbol{S}}_2^2,\ \hat{S}_{2z}$ のうち、交換する演算子 4 つの組を 2 通り答えよ。答えのみでよい。